I - Puissances entières d'un nombre relatif

A - Notations a^n et a^{-n}

→ ex 1

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \dfrac{1}{a^n}$ et par convention : $a^0 = 1$.

a^n (lu « ***a* puissance *n*** ») est appelé **puissance** n-ième de a et n est appelé l'**exposant**.

Remarque : En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et 10^{-3}.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Exemple 2 : Écris sous la forme d'une puissance les expressions : $3^2 \times 3^3$ et $\dfrac{2^3}{2^5}$.

$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

B - Utiliser les formules sur les puissances

→ ex 2 et 3

Règles

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$a^m \times a^p = a^{m+p}$; $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ et $\left(a^m\right)^p = a^{m \times p}$.

Exemple 1 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n, où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$A = 5^7 \times 5^4$; $B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}}$; $C = \left(0{,}2^{-3}\right)^4$; $D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi$.

$A = 5^7 \times 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11}$	$B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^{-5+6} = (-2)^1 \; (= -2)$
$C = \left(0{,}2^{-3}\right)^4 = 0{,}2^{-3\times4} = 0{,}2^{-12}$	$D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 \; (= 1)$

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \dfrac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{8^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

$E = \dfrac{(-2)^4 \times \left(2^2\right)^{-5}}{\left(2^3\right)^{-3}}$ → On remplace 4 par 2^2 et 8 par 2^3.

$E = \dfrac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-9}}$ → On remarque que $(-2)^4 = 2^4$.

$E = 2^{4+(-10)-(-9)}$

$E = 2^{4-10+9}$ → On applique les règles sur les puissances.

$E = 2^3$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Règles

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple 3 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n, où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$F = 2^3 \times 5^3$; $G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}}$; $H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5}$; $I = \dfrac{\pi^4}{7^4}$.

$F = 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$

$H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6 \times \dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5}$

$G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}} = \left(\dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right)^{-5} = 3^{-5}$

$I = \dfrac{\pi^4}{7^4} = \left(\dfrac{\pi}{7}\right)^4$

II - Cas particuliers des puissances de 10

→ ex 4 et 5

Règles

Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$10^m \times 10^p = 10^{m+p}$ règle du **produit** de deux puissances de 10

$\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$ règle du **quotient** de deux puissances de 10

$\left(10^m\right)^p = 10^{m \times p}$ règle des **puissances** de puissance de 10

Exemple 1 : Écris les nombres $C = \dfrac{10}{10^{-3}}$ et $D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$C = \dfrac{10^1}{10^{-3}}$ → On remarque que $10 = 10^1$.

$C = 10^{1-(-3)}$
$C = 10^{1+3}$ → On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !)

$C = 10^4$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$

$D = 10^{-7-3}$ → On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !).

$D = 10^{-10}$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \left(10^{-3}\right)^{-7} \times \left(10^2\right)^{-3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$E = 10^{-3 \times (-7)} \times 10^{2 \times (-3)}$ → On applique la règle des puissances de puissance de 10.

$E = 10^{21} \times 10^{-6}$ → On effectue les multiplications sur les exposants.

$E = 10^{21+(-6)}$ → On applique la règle du produit de deux puissances de 10.

$E = 10^{15}$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

III - Grandeurs et conversions

A - Grandeurs produit et quotient

Définitions

On appelle **grandeur quotient**, le quotient de deux grandeurs.
On appelle **grandeur produit**, le produit de deux grandeurs.

Exemples : L'aire d'un rectangle est une grandeur produit (c'est le produit de la longueur par la largeur) et la vitesse est une grandeur quotient (quotient de la distance par le temps).

B - Conversions

→ ex 6 à 8

Règles

1 m = 10 dm
1 m^2 = 100 dm^2
1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 L
1,5 h = 1,5 × 60 min = 90 min = 1 h 30 min

Exemple 1 : Exprime 1 h 45 min en heure décimale.

$$1 \text{ h } 45 \text{ min} = 105 \text{ min} = \frac{105}{60} \text{ h} = 1{,}75 \text{ h}$$

Exemple 2 : Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de 574,8 $km{\cdot}h^{-1}$. Convertis cette vitesse en $m{\cdot}s^{-1}$.

574,8 $km{\cdot}h^{-1}$ signifie que l'on parcourt 574,8 km en 1 h.

Ainsi, $574{,}8 \text{ km}{\cdot}\text{h}^{-1} = \dfrac{574{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}}$.

574,8 km = 574 800 m et 1 h = 3 600 s.

Donc $574{,}8 \text{ km}{\cdot}\text{h}^{-1} = \dfrac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \dfrac{574\,800}{3\,600} \text{ m}{\cdot}\text{s}^{-1} = \dfrac{479}{3} \text{ m}{\cdot}\text{s}^{-1} \approx 159{,}7 \text{ m}{\cdot}\text{s}^{-1}$.

La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ 159,7 $m{\cdot}s^{-1}$.

Exemple 3 : La vitesse de rotation du disque dur d'un ordinateur est de 7 200 tours/min.
Convertis cette vitesse de rotation en tours par seconde.

7 200 tours/min signifie qu'en une minute, la partie rotative du disque dur effectue 7 200 tours autour de son axe.
1 min = 60 s.

Donc $7\,200 \text{ tours/min} = \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{60 \text{ s}} = \dfrac{7\,200}{60} \text{ tours/s} = 120 \text{ tours/s}$.

La vitesse de rotation du disque dur est de 120 tours/s.

Exemple 4 : La masse volumique du fer vaut 7,84 $g{\cdot}cm^{-3}$. Convertis-la en $kg{\cdot}m^{-3}$.

« La masse volumique du fer vaut 7,84 $g{\cdot}cm^{-3}$ » signifie que 1 cm^3 de fer a une masse de 7,84 g.

Ainsi, $7{,}84 \text{ g}{\cdot}\text{cm}^{-3} = \dfrac{7{,}84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.

7,84 g = 0,007 84 kg et 1 cm^3 = 0,000 001 m^3.

Donc $7{,}84 \text{ g}{\cdot}\text{cm}^{-3} = \dfrac{0{,}007\,84 \text{ kg}}{0{,}000\,001 \text{ m}^3} = \dfrac{0{,}007\,84}{0{,}000\,001} \text{ kg}{\cdot}\text{m}^{-3} = 7\,840 \text{ kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$.

La masse volumique du fer vaut donc 7 840 $kg{\cdot}m^{-3}$.

Exercices corrigés par animation

http://manuel.sesamath.fr

1 Donne l'écriture décimale des nombres suivants.

A = 3^4 B = $(-10)^5$ C = 2^{-5}

2 Donne l'écriture décimale des nombres suivants.

D = $\dfrac{7^5}{7^3}$ E = $(5 \times 3)^2$ F = $2^7 \times 5^7$

3 Écris les expressions suivantes sous la forme a^n, où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$$J = 5^4 \times 7^4$$

$$K = \frac{2^{-5} \times 3^8}{(-3)^6 \times 2^{-7}}$$

$$L = (5^{-2})^3 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 \times 3^2$$

$$M = \frac{12^5}{3^2 \times 6^3}$$

4 Donne l'écriture décimale des nombres suivants.

A = $32{,}48 \times 10^6$ C = 401×10^{-2}

B = $0{,}78 \times 10^2$ D = $94{,}6 \times 10^{-4}$

5 Écris sous la forme d'une seule puissance de 10 les expressions suivantes.

C = $10^6 \times 10^{-8}$ E = $\dfrac{10^{-2}}{10^2}$

D = $(10^{-1})^{-3}$ F = $10^2 \times 10^{-3} \times 10$

6 La vitesse de propagation du son dans l'air est d'environ 340 m/s. Convertis cette vitesse en km/h.

7 La masse volumique de l'air au niveau de la mer et à une température de 20°C est d'environ 1,2 kg·m^{-3}. Convertis cette masse volumique en g·cm^{-3}.

8 La puissance maximale de certains moteurs de voitures de Formule 1 approche, dans certains cas, les 900 chevaux et leur vitesse de rotation peut atteindre les 20 000 tours par minute. Calcule la vitesse de rotation de ces moteurs en tours par seconde.

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.