I - Division euclidienne

A - Multiples et diviseurs

→ ex 1 et 2

Définition — a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

Si $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel
alors **a est un multiple de b** ou **a est divisible par b** ou **b est un diviseur de a** ou **b divise a**.

Exemple : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

1 274 ÷ 49 = 26 donc 1 274 = 49 × 26.
1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26).
On dit également que :
- **1 274 est divisible par 49** (et par 26) ;
- **49 est un diviseur de 1 274** (et 26 aussi) ;
- **49 divise 1 274** (26 divise aussi 1 274).

1 974 ÷ 84 = 23,5.
23,5 n'est pas un entier naturel donc 1 974 n'est pas divisible par 84.
On peut dire également que :
- 84 n'est pas un diviseur de 1 974 ;
- 1 974 n'est pas un multiple de 84.

B - Division euclidienne

→ ex 3 et 4

Définition — a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ avec $r < b$ où q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de la division euclidienne.

Exemple : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12.
b. 278 = 6 × 45 + 8 : quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

a.
$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \hline 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On peut donc écrire :
183 = **12** × **15** + **3**
avec **3** < **12**.

b. 8 < 45 mais 8 > 6 donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

II - PGCD de deux entiers naturels

→ ex 5 à 8

Définition

Le **PGCD de deux entiers naturels non nuls** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Remarques :
- a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PGCD(a ; b) = b.
- a et b étant des entiers naturels, PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a).

Cas particulier **:** n étant un entier naturel non nul, PGCD(n ; 0) = n

Théorème — a et b sont deux entiers naturels non nuls

Si $a \geqslant b$ alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; $a - b$).

Exemple 1 : Détermine PGCD(189 ; 693) par la **méthode des soustractions successives**.

- 693 > 189 et 693 − 189 = 504 donc PGCD(693 ; 189) = PGCD(189 ; 504).
- On cherche maintenant PGCD(189 ; 504) : on applique à nouveau la propriété.
504 > 189 et 504 − 189 = 315 donc PGCD(504 ; 189) = PGCD(189 ; 315).
- On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :
315 > 189 et 315 − 189 = 126 donc PGCD(315 ; 189) = PGCD(189 ; 126).
- 189 > 126 et 189 − 126 = 63 donc PGCD(189 ; 126) = PGCD(126 ; 63).
Or 63 est un diviseur de 126 (126 = 63 × 2) donc PGCD(126 ; 63) = **PGCD(189 ; 693) = 63**.

Théorème — a et b sont des entiers naturels non nuls

Si $a \geqslant b$ alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Remarque : Dans cet algorithme, appelé aussi « algorithme d'Euclide », le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple 2 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

- On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : $782 = 136 \times 5 + 102$.
Donc PGCD(782 ; 136) = PGCD(136 ; 102).
- On cherche maintenant PGCD(136 ; 102) : on applique à nouveau la propriété.
On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : $136 = 102 \times 1 + 34$.
Donc PGCD(136 ; 102) = PGCD(102 ; 34).
- On continue avec PGCD(102 ; 34).
On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : $102 = 34 \times 3$.
Le reste est égal à **0** donc **PGCD(782 ; 136) = 34** qui est le dernier reste non nul.

$$\begin{array}{r|l} 782 & 136 \\ \hline 102 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 136 & 102 \\ \hline 34 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 102 & 34 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

III - Fractions irréductibles

ex 9 à 12

Définition

Deux **entiers naturels non nuls sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.
Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

- $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ — Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.
- $91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$ — Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91 ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à **1**.
On en déduit donc que **45 et 91 sont premiers entre eux**.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux **divisibles par 2**, ils ont donc un diviseur commun autre que 1 : leur **PGCD n'est pas égal à 1**. Ainsi **426 et 568 ne sont pas premiers entre eux**.

Définition

Une **fraction est irréductible** quand son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple 3 : Rends les fractions $\dfrac{75}{105}$; $\dfrac{396}{360}$ et $\dfrac{136}{782}$ irréductibles.

75 et 105 sont des multiples de 5 donc, on obtient :

$$\frac{75}{105} = \frac{15 \times \cancel{5}}{21 \times \cancel{5}} = \frac{15}{21}$$

15 et 21 sont des multiples de 3 donc, on obtient :

$$\frac{15}{21} = \frac{5 \times \cancel{3}}{7 \times \cancel{3}} = \frac{5}{7}$$

Ainsi $\dfrac{75}{105} = \dfrac{5}{7}$.

On écrit 396 et 360 sous la forme de produits de facteurs les plus petits possibles.

$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ donc :

$$\frac{396}{360} = \frac{\cancel{2^2} \times \cancel{3^2} \times 11}{2^{\cancel{3}} \times \cancel{3^2} \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

Ainsi $\dfrac{396}{360} = \dfrac{11}{10}$.

Le PGCD de 136 et 782 est 34.
34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont nécessairement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}$$

Ainsi $\dfrac{136}{782} = \dfrac{4}{23}$.

Exercices corrigés par animation

http://manuel.sesamath.fr

1 Établis la liste des diviseurs des entiers suivants : 60, 43 et 36.

2 Démontre que le produit de deux entiers naturels pairs est un multiple de 4.

3 Effectue les divisions euclidiennes suivantes : 345 par 74 et 6 675 par 89.

4 $325 = 5 \times 52 + 65$. Sans effectuer de division, donne le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 52.

5 16 est-il un diviseur commun à 64 et 160 ? Est-il leur PGCD ?

6 Quel est le plus grand nombre entier naturel divisant à la fois 35 et 91 ?

7 Calcule le PGCD de 198 et de 54 par la méthode des soustractions successives.

8 Calcule PGCD (1 789 ; 1 492) par la méthode des divisions successives. Combien d'étapes aurait nécessité la méthode des soustractions successives ?

9 Démontre que 481 et 625 sont premiers entre eux.

10 Démontre que 360 et 741 ne sont pas premiers entre eux.

11 La fraction $\frac{456}{568}$ est-elle irréductible ? Justifie ta réponse.

12 Rends les fractions $\frac{48}{60}$ et $\frac{276}{161}$ irréductibles.

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.