

I - La sphère et la boule

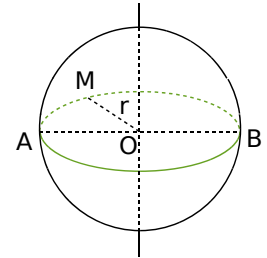
A - Définitions

Définitions

La **sphère** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est l'**ensemble des points M** tels que $OM = r$.
 La **boule** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est l'**ensemble des points M** tels que $OM \leq r$.

Remarques :

- On peut dire que la sphère est l'enveloppe de la boule (comme la peau d'une orange) tandis que la boule est l'intérieur.
- $[AB]$ est un diamètre de la sphère (segment qui joint 2 points de la sphère passant par le centre de la sphère).
- Le cercle vert est un **grand cercle** de la sphère (cercle de centre O et de rayon r).



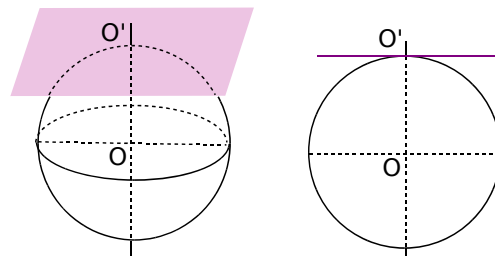
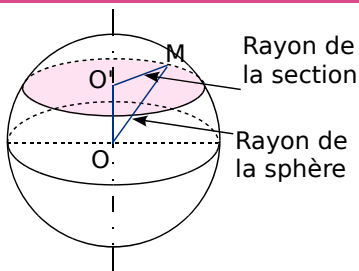
B - Section d'une sphère par un plan

→ ex 1 et 2

Propriétés

La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle** de centre O' .
 Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.

Quand la distance OO' correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite au point O' . On dit que le plan est **tangent à la sphère en O'** .



Exemple : Une sphère de rayon 4 cm est coupée par un plan à 3 cm de son centre. Donne la nature et les dimensions de la section.

La section d'une sphère par un plan est un cercle. M est un point de la section. La droite (OO') est perpendiculaire au plan de section et en particulier au rayon de la section $[O'M]$.
 Donc le triangle $OO'M$ est rectangle en O' .

D'après le théorème de Pythagore :

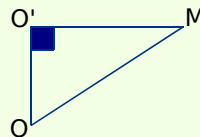
$$OM^2 = O'M^2 + O'O^2.$$

$$16 = O'M^2 + 9$$

$$O'M^2 = 16 - 9$$

$$O'M^2 = 7$$

$$\text{d'où } O'M = \sqrt{7} \text{ cm.}$$



Le rayon de la section de cette sphère mesure $\sqrt{7}$ cm.

Remarques :

- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est alors appelée grand cercle.



II - Sections de solides

A - Sections d'un parallélépipède rectangle

→ ex 3 à 5

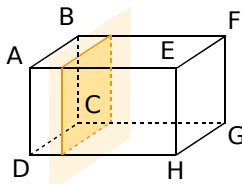
Propriétés

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.

La section d'un pavé droit ou d'un cube par un plan parallèle à une arête est un rectangle, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.

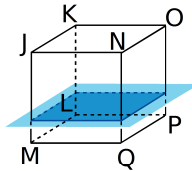
Exemple 1 : On coupe le pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à la face ABCD.

Donne la nature et les dimensions de la section.

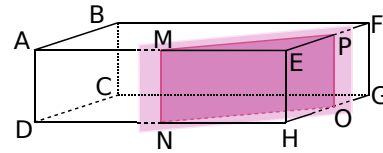


La section est un rectangle de mêmes dimensions que ABCD.

Remarque : Dans le cas particulier du cube, la section par un plan parallèle à une face est un carré de même dimension que cette face.



Exemple 2 : On coupe le pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [EH] de longueur 4 cm. Donne la nature et les dimensions de la section MNOP, sachant que $EM = 3$ cm et $EP = 2$ cm.



La section est le rectangle MNOP où $MN = EH$. La face AEFB du pavé droit est un rectangle donc le triangle MEP est rectangle en E. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on démontre que $MP = \sqrt{13}$. Les dimensions de MNOP sont 4 cm et $\sqrt{13}$ cm.

B - Sections d'un cylindre de révolution

→ ex 6

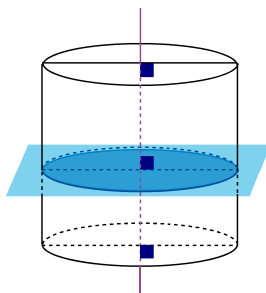
Propriétés

La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base.

La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.

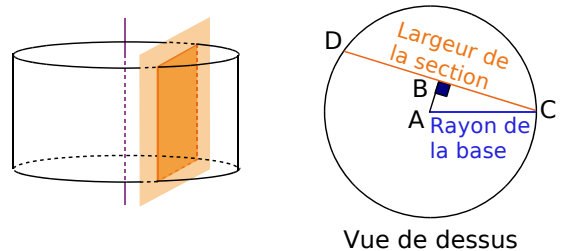
Exemple 1 : On coupe un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe.

Donne la nature et les dimensions de la section.



La section est un cercle de même rayon que la base.

Exemple 2 : On coupe un cylindre de révolution de hauteur 10 cm dont le rayon de la base est 3 cm, parallèlement à son axe, à 2 cm de celui-ci. Donne la nature et les dimensions de la section.



Vue de dessus

La section est un rectangle de longueur la hauteur du cylindre : ici, 10 cm. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on démontre que $DC = 2\sqrt{5}$. Les dimensions de la section rectangulaire de ce cylindre sont 10 cm et $2\sqrt{5}$ cm.

C - Sections de pyramides et cônes

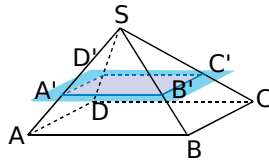
→ ex 7

Propriété

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un **plan parallèle à la base** est une **réduction de la base**.

Exemple 1 : On coupe une pyramide SABCD à base carrée de côté 3 cm et de hauteur 5 cm, par un plan parallèle à sa base à 4 cm du sommet.

Donne la nature et les dimensions de la section A'B'C'D'.

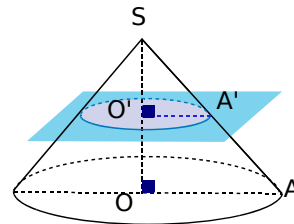


Le coefficient de réduction est

$$k = \frac{4}{5} \text{ donc } A'B' = k \times AB = \frac{4}{5} \times 3 = 2,4 \text{ cm.}$$

La section est donc un carré de côté 2,4 cm.

Exemple 2 : On coupe un cône de révolution par un plan parallèle à sa base. Donne la nature de la section.



La section est une réduction de la base, c'est donc un cercle.

III - Aires et volumes

A - Aire et volume de la boule

→ ex 8 et 9

Formules

Pour calculer l'**aire \mathcal{A} d'une sphère**, on utilise la formule : $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$.

Pour calculer le **volume \mathcal{V} d'une boule**, on utilise la formule : $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$.

Exemple : Calcule l'aire d'une sphère et le volume d'une boule, toutes deux de rayon 5 cm. Donne les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième près.

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 5^2$$

$$\mathcal{A} = 100\pi \text{ cm}^2 \text{ valeur exacte}$$

$$\mathcal{A} \approx 314,2 \text{ cm}^2 \text{ valeur approchée}$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$$

$$\mathcal{V} = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3 \text{ valeur exacte}$$

$$\mathcal{V} \approx 523,6 \text{ cm}^3 \text{ valeur approchée}$$

B - Effets des agrandissements ou réductions

→ ex 10

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de **rapport k** ,

- les longueurs sont **multipliées par k** ,
- les aires sont **multipliées par k^2** ,
- les volumes sont **multipliés par k^3** .

Exemple : Un aquarium a pour dimensions :

L 60 cm × l 30 cm × H 30 cm, la surface de ses vitres est 7 200 cm² et son volume est 54 000 cm³. Thomas a réalisé une maquette de cet aquarium au sixième. Quels en sont les dimensions, la surface des vitres et le volume ?

Le coefficient de réduction est $k = \frac{1}{6}$.

• Les dimensions de la maquette sont :

$$L \ 10 \text{ cm} \times l \ 5 \text{ cm} \times H \ 10 \text{ cm.}$$

• La surface des vitres de la maquette est : $7\ 200 \times \frac{1^2}{6^2} = 7\ 200 \times \frac{1}{36} = 200 \text{ cm}^2$.

• Le volume de la maquette est : $54\ 000 \times \frac{1^3}{6^3} = 54\ 000 \times \frac{1}{216} = 250 \text{ cm}^3$.



À toi de jouer!



1 Une sphère de rayon 7 cm est coupée par un plan à 5 cm de son centre.

- a. Quelle est la nature de la section ?
- b. Représente la section en vraie grandeur.



2 Une sphère de rayon 13 cm est coupée par un plan à 12 cm du centre.

- a. Représente la sphère et la section en perspective.
- b. Quel est le rayon de la section ?

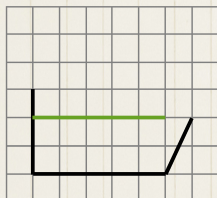


3 Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions $AB = 5$ cm, $AD = 6$ cm et $AE = 8$ cm. Il est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH], le long de la diagonale [AF].

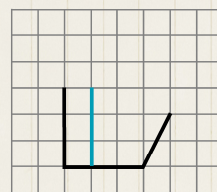
- a. Représente en vraie grandeur la face ABFE et la section AFGD.
- b. Détermine les dimensions exactes de cette section.
- c. Donne la valeur arrondie au dixième de l'aire de cette section.



4 Reproduis la figure et complète le tracé du pavé droit en noir, et de la section parallèle aux faces horizontales en vert.



5 Reproduis la figure et complète le tracé du cube en noir, et de la section parallèle aux faces verticales en bleu.



6 La section d'un cylindre de révolution de hauteur 12 cm par un plan parallèle à son axe a pour largeur 8 cm. La distance entre l'axe et la section est 3 cm. Quel est le rayon de la base de ce cylindre ?



7 Un verre à cocktail de forme conique de contenance 12,8 cL est rempli aux trois quarts de sa hauteur par un mélange de jus de fruits. Quel volume de jus de fruits contient-il ?



8 Calcule l'aire exacte d'une sphère de rayon 6,2 cm puis arrondis le résultat au cm^2 .



9 Calcule le volume exact d'une boule de rayon 9 cm puis l'arrondi au mm^3 .



10 Mihail fabrique deux pyramides dans du papier doré. Il réalise la deuxième en divisant toutes les longueurs de la première par 2. La surface de papier utilisé est-elle deux fois plus petite ? Le volume de l'objet obtenu est-il deux fois plus petit ?



Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.