I - Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

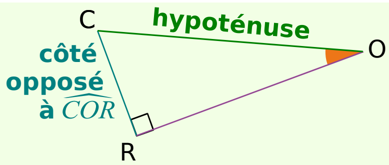
A - Définitions

→ ex 1 à 3

Définitions Dans un **triangle rectangle**,

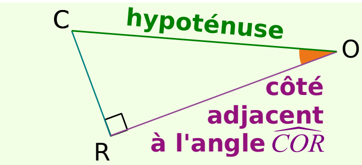
le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.	**le cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.	**la tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Exemple : Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{COR}$ puis la formule donnant la tangente de l'angle $\widehat{OCR}$.



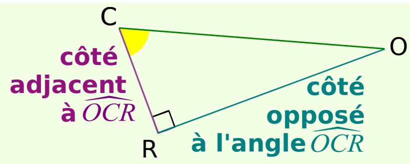
$$\textbf{S}\text{in } \widehat{COR} = \frac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé à } \widehat{COR}}{\textbf{H}\text{ypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{COR} = \frac{RC}{CO}$$



$$\textbf{C}\text{os } \widehat{COR} = \frac{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent à } \widehat{COR}}{\textbf{H}\text{ypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{COR} = \frac{RO}{CO}$$



$$\textbf{T}\text{an } \widehat{OCR} = \frac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé à } \widehat{OCR}}{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent à } \widehat{OCR}}$$

$$\tan \widehat{OCR} = \frac{RO}{RC}$$

Remarques :

- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
- La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif.

B - Applications

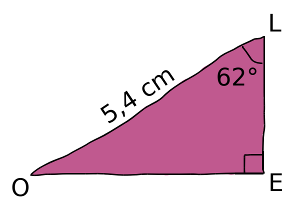
→ ex 4 à 8

Exemple 1 : <u>Calculer une longueur</u>

On considère un triangle LEO rectangle en E tel que :
LO = 5,4 cm et $\widehat{ELO}$ = 62°.

a. Calcule la longueur du côté [OE] arrondie au millimètre.

b. Puis, calcule la longueur du côté [EL] arrondie au millimètre.



a. Dans le triangle LEO rectangle en E,
[LO] est l'hypoténuse ;
[OE] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ELO}$.
→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser. On doit utiliser le sinus de l'angle $\widehat{ELO}$.

$$\sin \widehat{ELO} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{ELO} = \frac{OE}{LO}$$

→ On écrit le cosinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$OE = LO \times \sin \widehat{ELO}$ → On applique la règle des produits en croix.

$OE = 5{,}4 \times \sin 62°$ → On saisit 5,4 × SIN 62 à la calculatrice.

$OE \approx 4{,}8$ cm → OE est inférieure à LO. Le résultat est cohérent.

b. Pour calculer la longueur du segment [EL], on peut utiliser deux méthodes différentes.

<u>Première méthode :</u> On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle LEO rectangle en E.

$LO^2 = OE^2 + EL^2$

$5{,}4^2 \approx 4{,}8^2 + EL^2$

$EL^2 \approx 5{,}4^2 - 4{,}8^2 \approx 6{,}12$

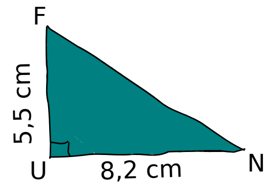
$EL \approx \sqrt{6{,}12}$ donc $EL \approx 2{,}5$ cm.

<u>Deuxième méthode :</u> On utilise une deuxième relation trigonométrique.

Dans le triangle LEO rectangle en E, [LO] est l'hypoténuse ; [EL] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ELO}$.	→	On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser. On doit utiliser le cosinus de $\widehat{ELO}$.
$\cos \widehat{ELO} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos \widehat{ELO} = \dfrac{EL}{LO}$	→	On écrit le cosinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)
$EL = LO \times \cos \widehat{ELO}$	→	On applique la règle des produits en croix.
$EL = 5{,}4 \times \cos 62°$	→	On saisit 5,4 × $\boxed{\cos}$ 62 à la calculatrice.
$EL \approx 2{,}5$ cm.	→	EL est inférieure à LO. Le résultat est cohérent.

Exemple 2 : <u>Calculer un angle</u>

Soit FUN un triangle rectangle en U tel que :
UN = 8,2 cm et UF = 5,5 cm.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.



Dans le triangle FUN rectangle en U, [FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$; [UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$.	→	On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser. On doit utiliser la tangente de $\widehat{UNF}$.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$ $\tan \widehat{UNF} = \dfrac{UF}{UN}$	→	On écrit la tangente de l'angle recherché.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{5{,}5}{8{,}2}$ $\widehat{UNF} \approx 34°$.	→	On saisit $\boxed{\text{2nde}}$ ou $\boxed{\text{SHIFT}}$ puis $\boxed{\text{TAN}}$ (5,5 ÷ 8,2) à la calculatrice.

II - Relations trigonométriques

→ ex 9

Propriétés

Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$ et $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

Remarque : La première formule peut aussi s'écrire $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$.

Exemple :

a. Calcule la valeur exacte de $\sin \hat{A}$ sachant que $\hat{A}$ est un angle aigu tel que $\cos \hat{A} = 0{,}8$.

b. Puis calcule la valeur exacte de $\tan \hat{A}$.

a. $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$ donc $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.
Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin \hat{A} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

b. $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Exercices corrigés par animation

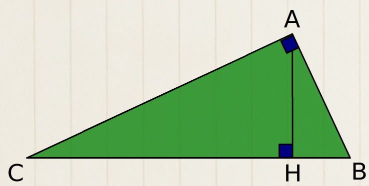
http://manuel.sesamath.fr

1 ENT est un triangle rectangle en E. Écris les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{TNE}$, $\sin \widehat{TNE}$ et $\tan \widehat{TNE}$.

2 NOE est un triangle rectangle en O. Pour chacun des rapports suivants, précise s'il s'agit du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un des angles aigus du triangle NOE : $\frac{NO}{NE}$; $\frac{OE}{ON}$; $\frac{EO}{EN}$ et $\frac{ON}{OE}$.
Tu préciseras lequel.

3 Sur la figure ci-dessous, H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC rectangle en A.

a. Écris de deux façons différentes les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{ACB}$, $\sin \widehat{ACB}$ et $\tan \widehat{ACB}$.
b. Recommence avec l'angle $\widehat{ABC}$.



4 Le triangle NIV est rectangle en N ; VN = 4 m et l'angle $\widehat{VIN}$ mesure 12°.
Calcule la longueur NI arrondie au centimètre.

5 Le triangle AUE est rectangle en U ; AE = 10 cm et $\widehat{EAU}$ = 19°.
Donne la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [UE].

6 Le triangle VLR est rectangle en V ; LR = 8,7 cm et $\widehat{VRL}$ = 72°.
Donne la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [VR].

7 Le triangle EXO est rectangle en X tel que EX = 3 cm et OE = 7 cm.
Calcule les valeurs arrondies au degré de la mesure des angles $\widehat{EOX}$ et $\widehat{XEO}$.

8 Le triangle JUS est rectangle en U. Calcule la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{UJS}$ sachant que UJ = 6,4 cm et US = 4,8 cm.

9 Calcule la valeur exacte de $\cos \hat{B}$ et $\tan \hat{B}$ sachant que $\hat{B}$ est un angle aigu tel que $\sin \hat{B} = \frac{5}{13}$.

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.