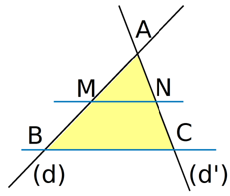
I - Théorème de Thalès

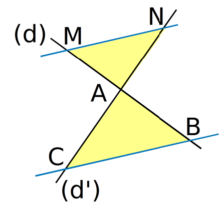
A - Énoncé du théorème

Théorème

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les **droites (BC) et (MN) sont parallèles**
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



ou

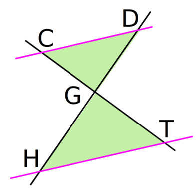


Remarque 1 : M et N peuvent être situés de l'autre côté de A par rapport à B et C.
On parle alors d'une configuration « en papillon » ou « croisée ».

Remarque 2 : Le premier rapport $\frac{AM}{AB}$ comporte les noms des points de la droite (d), tandis que le second rapport comporte les noms des points de (d').

B - Calcul d'une longueur

→ ex 1 et 2



Exemple : Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm. Calcule GT et CD.

Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G. Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{GC}{GT} = \frac{GD}{GH} = \frac{CD}{HT}$, soit $\frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$.

Calcul de GT : **$25 \times GT = 45 \times 20$**.
$GT = \frac{45 \times 20}{25}$
donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : **$25 \times 27 = 45 \times CD$**.
$CD = \frac{25 \times 27}{45}$
donc CD = 15 mm.

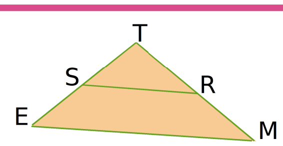
C - Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

→ ex 3

Théorème

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A. C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites **(BC) et (MN) ne sont pas parallèles**.

Exemple : Sur la figure ci-contre, TR = 11 cm ; TS = 8 cm ;
TM = 15 cm et TE = 10 cm.
Montre que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.



Les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.

D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$.

D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$.

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$.

Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

II - Réciproque du théorème de Thalès

ex 4

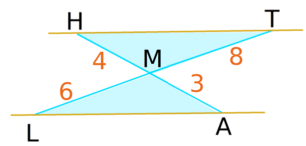
Théorème

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors **les droites (BC) et (MN) sont parallèles**.

Remarque 1 : Attention, il ne suffit pas de vérifier l'égalité des rapports : il faut aussi s'assurer que les points sont bien placés dans le même ordre.

Remarque 2 : Attention, il ne faut pas utiliser les valeurs approchées pour affirmer que deux quotients sont égaux.

Exemple : Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$.

D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$. De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

III - Agrandissements ou réductions

ex 5

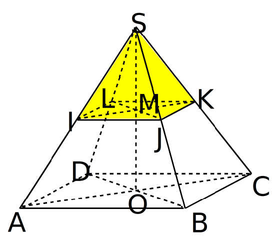
Définition

Lorsque deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est un agrandissement de $\mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}'$ est une réduction de $\mathcal{F}$. Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ($k > 1$) ou de réduction ($0 < k < 1$).

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.



Exemple : La pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD.
On donne AB = 6 cm ; SA = 15 cm et SI = 5 cm.

a. Calcule IJ.

b. Que dire des angles $\widehat{SIJ}$ et $\widehat{SAB}$?

a. On sait que la pyramide SIJKL est une réduction de rapport k de la pyramide SABCD.
Donc les longueurs des deux pyramides sont proportionnelles.

[SI] étant une réduction de rapport k de [SA], on en déduit que : $k = \frac{SI}{SA} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

De même, [IJ] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AB]. Donc $IJ = k \times AB = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

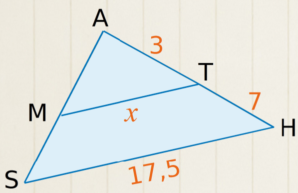
b. Les angles $\widehat{SIJ}$ et $\widehat{SAB}$ ont la même mesure car le triangle SIJ est une réduction du triangle SAB.

Exercices corrigés par animation

http://manuel.sesamath.fr

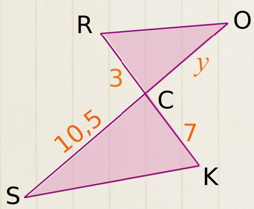
1 Dans chacun des cas suivants, calcule, si c'est possible, la valeur de x, y et z indiquée sur la figure.

a.



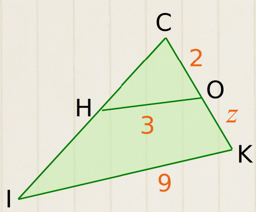
(MT) // (SH)

b.



(RO) // (SK)

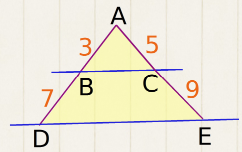
c.



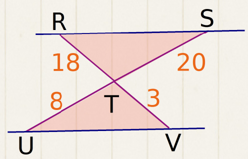
2 Dans le triangle DOT, E est un point de [DO]. La parallèle à (OT) passant par E coupe [DT] en F. On sait que DO = 6 cm ; DT = 5 cm ; OT = 8 cm et DF = 1 cm. Calcule DE et EF.

3 Montre que les droites bleues ne sont pas parallèles.

a.

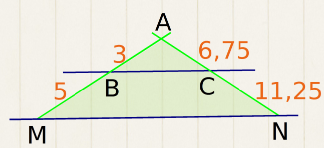


b.

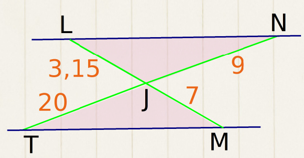


4 Montre que les droites bleues dans les figures ci-dessous sont parallèles.

a.



b.



5 Soit TRAN un losange tel que TR = 5 cm et tel que l'angle $\widehat{TRA}$ mesure 30°.
On sait que JEDI est un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$ de TRAN. Construis JEDI.

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.