

I - Définitions et premiers calculs

→ ex 1 à 3

Définitions

- On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x$) où a est un nombre.
- On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.

Remarques :

- Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$). Les fonctions linéaires traduisent des **situations de proportionnalité**.
- Lorsque $a = 0$, la fonction est une **fonction constante** : à tout nombre x , elle associe le nombre b .

Propriétés

- Tout nombre admet **une unique image** par une fonction linéaire ou affine.
- Tout nombre admet **un unique antécédent** par une fonction linéaire ou affine non constante.

Exemple 1 :

Soit la fonction f linéaire telle que $f(x) = 2x$.

- Calcule l'image de 3 par la fonction f .
- Calcule l'antécédent de 7 par la fonction f .

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) = 2x &\longrightarrow \text{On remplace } x \text{ par } 3. \\ f(3) = 2 \times 3 &\longrightarrow \text{On calcule.} \\ f(3) = 6 &\longrightarrow \text{L'image de } 3 \text{ par la} \\ &\text{fonction } f \text{ est } 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) = 7 &\longrightarrow \text{On cherche le nombre} \\ &\text{ } x \text{ qui a pour image } 7. \\ 2x = 7 &\longrightarrow \text{On résout.} \\ x = 3,5 &\longrightarrow \text{L'antécédent de } 7 \text{ par} \\ &\text{ } f \text{ est donc } 3,5. \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Soit la fonction g affine telle que $g(x) = 5x - 1$.

- Calcule l'image de -7 par la fonction g .
- Calcule l'antécédent de 14 par la fonction g .

$$\begin{aligned} \text{a. } g(x) = 5x - 1 &\longrightarrow \text{On remplace } x \text{ par } -7. \\ g(-7) = 5 \times (-7) - 1 &\longrightarrow \text{On calcule.} \\ g(-7) = -36 &\longrightarrow \text{L'image de } -7 \text{ par la} \\ &\text{fonction } g \text{ est } -36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } g(x) = 14 &\longrightarrow \text{On cherche le nombre} \\ &\text{ } x \text{ qui a pour image } 14. \\ 5x - 1 = 14 &\longrightarrow \text{On résout.} \\ 5x = 15 &\longrightarrow \text{L'antécédent de } 14 \\ x = 3 &\text{ par } g \text{ est donc } 5. \end{aligned}$$

II - Détermination d'une fonction linéaire ou affine

→ ex 4

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.

$$\begin{aligned} f(x) = ax &\longrightarrow f \text{ est une fonction linéaire de coefficient } a. \\ f(5) = 5a \text{ et } f(5) = 4 &\longrightarrow \text{On remplace } x \text{ par } 5. \\ 5a = 4 &\longrightarrow \text{On obtient une équation que l'on résout.} \\ a = \frac{4}{5} &\longrightarrow f \text{ est donc la fonction définie par } f(x) = \frac{4}{5}x. \end{aligned}$$

Propriété

Pour toute fonction affine g de coefficient a , les accroissements des valeurs de $g(x)$ et de x sont proportionnels donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.



Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(5) = 4$ et $g(-2) = 25$.

Première méthode :

$g(x) = ax + b$ \longrightarrow g est une fonction affine.
 $g(5) = 5a + b = 4$ \longrightarrow On remplace x par 5.
 et $g(-2) = -2a + b = 25$ \longrightarrow On remplace x par -2 .
 Donc $\begin{cases} 5a + b = 4 \\ -2a + b = 25 \end{cases}$ \longrightarrow On obtient un système de deux équations que l'on résout.
 On obtient $a = -3$ et $b = 19$ \longrightarrow g est donc la fonction définie par $g(x) = -3x + 19$.

Deuxième méthode :

$a = \frac{g(-2) - g(5)}{-2 - 5}$ \longrightarrow On détermine le coefficient a en utilisant la propriété des accroissements.
 $a = \frac{25 - 4}{-2 - 5} = \frac{21}{-7} = -3$
 $g(x) = -3x + b$ \longrightarrow On remplace a par -3 dans l'expression de g .
 $g(5) = 5 \times (-3) + b = 4$ \longrightarrow On remplace x par 5.
 $b = 19$ \longrightarrow On résout l'équation pour déterminer b .
 On obtient $a = -3$ et $b = 19$ \longrightarrow g est donc la fonction définie par $g(x) = -3x + 19$.

III - Représentation graphique

\longrightarrow ex 5 et 6

Propriété

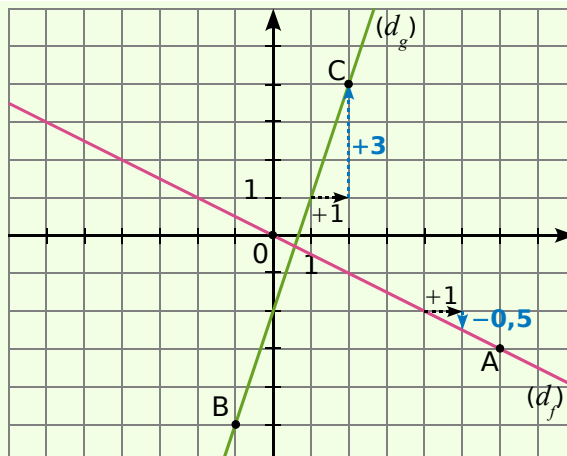
La représentation graphique d'une **fonction affine** $g : x \mapsto a \times x + b$ est une **droite**.
 Dans le cas d'une **fonction linéaire** ($b = 0$), cette **droite passe par l'origine** du repère et par le point de coordonnées $(1 ; a)$.

Remarques :

- a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente d'une unité.
- b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$. La droite passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

Exemple 1 : Représente graphiquement la fonction linéaire f définie par $f(x) = -0,5x$.

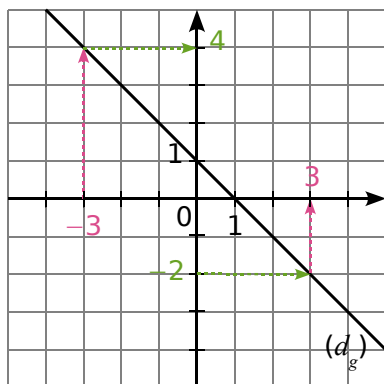
f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
 Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées d'un de ses points : on calcule l'image d'un nombre par la fonction f .
 Par exemple : $A(6 ; -3)$.
 On trace (d_f) qui passe par l'origine et par le point A.



Exemple 2 : Représente graphiquement la fonction affine g définie par $g : x \mapsto 3x - 2$.

g est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.
 Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux de ses points.
 Par exemple :
 $B(-1 ; -5)$ et $C(2 ; 4)$.
 On trace (d_g) qui passe par les points B et C.

IV - Lectures graphiques



Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée g . Détermine l'image de -3 et l'antécédent de -2 par g .

Pour lire l'image de -3 :

L'**image** de -3 est l'**ordonnée** du point de la droite d'**abscisse** -3 .

L'image de -3 par la fonction g est 4.

Pour lire l'antécédent de -2 :

L'**antécédent** de -2 est l'**abscisse** du point de la droite d'**ordonnée** -2 .

L'antécédent de -2 par la fonction g est 3.

Exercices corrigés par animation



<http://manuel.sesamath.net>

À toi de jouer !

1 Indique, en justifiant, si les fonctions sont linéaires, affines ou ni l'un ni l'autre.

• $f(x) = x^2 - 2$ • $k(x) = (13 - 8x)^2 - 64x^2$
 • $g(x) = 8 - 9x$ • $l(x) = \frac{2}{x}$
 • $h(x) = \frac{3}{5}x$

2 Détermine l'image de -4 par la fonction affine h définie par $h(x) = -8x + 3$.

3 Détermine l'antécédent de -6 par la fonction affine h définie par $h(x) = -x + 3$.

4 Détermine la fonction affine h telle que l'image de -5 soit égale à 12 et celle de 4 soit égale à -7 .

5 Trace les représentations graphiques des fonctions l et m définies par $l(x) = -0,5x$ et $m(x) = -0,5x + 2$. Que constates-tu ?

6 Comment tracer précisément la représentation graphique de la fonction qui, à x , associe $0,75x$?

Tous ces exercices sont également corrigés à la fin du manuel.