

Activité 1 : De nouveaux nombres

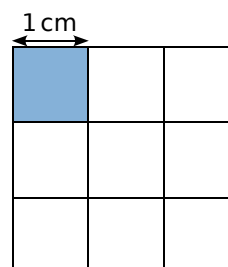
1. Quelques racines carrées simples

- Trouve tous les nombres dont le carré est 16.
Même question avec 0,81.
- Si a et b sont deux nombres qui ont le même carré, que peux-tu dire de a et b ? Justifie.
- Donne la mesure du côté du carré ci-contre.
- Donne la mesure du côté d'un carré dont l'aire est $0,49 \text{ cm}^2$.
- Trace un carré d'aire 36 cm^2 . On appelle d le côté de ce carré en centimètres. Quelle relation existe-t-il entre d et 36 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.



2. Un carré d'aire 2

- Peux-tu tracer un carré dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre ? (Tu pourras t'aider du quadrillage si tu le désires) Compare ta réponse avec celles de tes camarades.
- On appelle c le côté de ce carré en centimètres. Quelle relation existe-t-il entre c et 2 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.
- Peux-tu donner une écriture décimale de c ?



3. La notation racine carrée

Le nombre positif dont le carré est 36 est noté $\sqrt{36}$ et se lit « racine carrée de 36 ».
On a vu dans les questions précédentes que $\sqrt{36} = 6$.
Le nombre positif dont le carré est 2 est noté $\sqrt{2}$ et se lit « racine carrée de 2 ».

- Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifie.
- À l'aide de la calculatrice, donne une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$.
- Recopie et complète le tableau suivant, en utilisant ta calculatrice. Les valeurs seront arrondies au millième.

a	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
\sqrt{a}															

- Que remarques-tu ?
- Certains nombres entiers ont une racine carrée entière. On dit que ces nombres sont des carrés parfaits. Cite tous les carrés parfaits compris entre 0 et 256.

4. Premiers calculs

- Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont égaux à 13 ?

$$\sqrt{13^2} ; \sqrt{13} ; (\sqrt{13})^2 ; \sqrt{(-13)^2} ; 13^2.$$

- Quelles sont les valeurs exactes de $E = \sqrt{7^2}$ et $F = \sqrt{(\pi - 5)^2}$?

Activité 2 : Approximation d'une racine carrée

1. Avec la calculatrice

- a. On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{33}$.
Sans calculatrice, donne un encadrement à l'unité de ce nombre.
- b. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, donne un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

N	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
N ²											

2. Avec un tableur

- a. Construis la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Pas											
2	N	5										6
3	N ²											

- b. Quelle formule dois-tu écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permette d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
Complète la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1 puis recopie la formule jusqu'en K2. (Pour recopier la formule sans changer B1, écris \$B\$1 au lieu de B1.)
- c. Complète la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2 puis recopie la formule jusqu'à L3.
- d. Observe le tableau et donne un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.
- e. Remplace le contenu de B2 et de L2 par les bornes de ton encadrement.
Quel encadrement de $\sqrt{33}$ obtiens-tu ? Quelle est sa précision ?
- f. Recommence la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de 10^{-6} . (Tu peux changer le format d'affichage des nombres.)
- g. Utilise ta feuille de calcul pour obtenir une approximation de $\sqrt{125}$ à 10^{-4} près.

Activité 3 : Somme de deux racines carrées

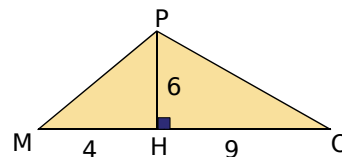
Dans toute cette activité, on prendra comme unité : $1 u = 5 \text{ cm}$.

- a. Construis un carré OUBA de côté $1 u$. Trace le cercle de centre O et de rayon OB. Il coupe la demi-droite [OU) en C. Calcule OC en utilisant l'unité de mesure choisie.
- b. Trace la droite perpendiculaire à (OU) passant par C. Elle coupe (AB) en C'. Le cercle de centre O, de rayon OC' coupe [OU) en D. Calcule OD dans l'unité de mesure choisie.
- c. En t'inspirant des questions précédentes, construis le point F de la demi-droite [OU) tel que $OF = \sqrt{5} u$.
- d. Place le point G sur la demi-droite [OU) tel que $OG = OC + OD$.
Quelle est la mesure exacte de OG ?
Compare OF et OG. Que peux-tu en déduire ?

Activité 4 : Produit de deux racines carrées

1. Conjecture

- Quelle est l'aire du triangle POM ?
- Démontre que POM est un triangle rectangle.
- Calcule l'aire de ce triangle d'une deuxième manière.
- En t'aidant des résultats trouvés dans les questions a. et c., écris $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme \sqrt{c} où c est un nombre entier. Déduis-en un moyen de calculer $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ d'une autre manière.
- Recopie et complète le tableau suivant puis émet une conjecture.



a	b	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4	16		
5	2		
100	64		
-2	-3		

2. Démonstration

On va démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres a et b positifs. L'idée de la démonstration est d'élever au carré chacun des termes de l'égalité.

- Pourquoi a et b doivent-ils être positifs ?
- Calcule $(\sqrt{a \times b})^2$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ puis conclus.

3. Exemples

- Sans calculatrice, calcule les nombres suivants :

$$A = \sqrt{5} \times \sqrt{45} ; B = \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}$$

- Calcule de même $D = \sqrt{2} \times \sqrt{18}$ et $E = \sqrt{27} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8}$.

- Développe et réduis les expressions suivantes :

$$F = 3\sqrt{2} (7\sqrt{2} - \sqrt{5}) ; G = (\sqrt{7} + 2)(15 - \sqrt{3})$$

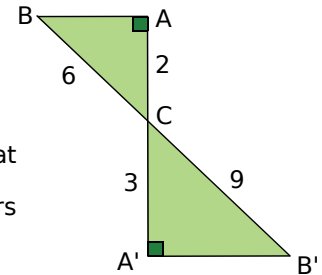
4. Application aux simplifications de racines

- Décompose 12 sous la forme d'un produit de deux entiers. Combien y a-t-il de possibilités ? Laquelle permet de simplifier $\sqrt{12}$?
- Même question avec $\sqrt{45}$.
- Quelle méthode peux-tu utiliser pour simplifier une racine carrée ?
- Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers positifs avec b le plus petit possible : $\sqrt{72}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{32}$.

Activité 5 : Quotient de deux racines carrées

1. Conjecture

- Calcule la valeur de $\frac{AB}{A'B'}$.
- En utilisant la définition d'une racine carrée, écris le résultat précédent sous la forme $\sqrt{\frac{a}{b}}$ où a et b sont des entiers positifs avec $b \neq 0$.
- Calcule AB puis $A'B'$.
- Compare les deux écritures de $\frac{AB}{A'B'}$ et trouve un moyen pour simplifier $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.
- Recopie et complète le tableau suivant et déduis-en une conjecture donnant une méthode de simplification de quotients de racines carrées.



a	b	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
25	16		
100	64		
49	9		
-2	-4		

2. Démonstration

On va démontrer que, si a est positif et b est strictement positif alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

- Pourquoi a doit-il être positif et b strictement positif ?
- Démontre l'égalité.

Activité 6 : Équation du type $x^2 = a$

- Quels sont les nombres dont le carré est 49 ? 225 ? 7 ?
- Existe-t-il des nombres dont le carré est -9 ? -36 ? -7 ? Justifie.
- Selon toi, combien existe-t-il de solution(s) pour les équations suivantes ?
 - $x^2 = 16$
 - $x^2 = 13$
 - $x^2 = -4$
- Factorise $x^2 - 10$ puis résous l'équation $x^2 = 10$.
- Combien de solutions a l'équation $(x + 2)^2 = 5$?
- Résous l'équation $(x + 2)^2 = 5$.

Activité 7 : Le point sur les nombres

1. Les ensembles de nombres

Voici une liste de nombres.

$$-\frac{457}{23} ; 4\sqrt{2} ; 854 ; 0,000\ 08 \times 10^7 ; \sqrt{49} ; \pi ; \frac{174}{58} ; -0,000\ 415\ 7 ; -\sqrt{\frac{4}{9}} ; \frac{58}{4} ; 10^{-3}.$$

- Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?
- Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?
- Y a-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire ?
- Y a-t-il des nombres que tu n'as pas su classer dans une des catégories précédentes ?

2. Rationnel ou pas ?

- $\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal. Est-ce un nombre rationnel ?
Dans cette partie, on suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel et qu'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible. Démontre que $2q^2 = p^2$.
- Dans cette question, on va étudier la divisibilité de p^2 et de $2q^2$ par 2 et par 5. Pour cela, recopie et complète les tableaux ci-dessous.

Si le chiffre des unités de p est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est...										

Si le chiffre des unités de q est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est...										
et le chiffre des unités de $2q^2$ est...										

- En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont), selon toi, le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de p et q quand $2q^2 = p^2$?
- La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ? Qu'en déduis-tu pour le nombre $\sqrt{2}$?

3. Une autre démonstration

- On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q donc il peut s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible. Démontre que $2q^2 = p^2$ et déduis-en que p^2 est pair.
- En utilisant la propriété énoncée dans l'exercice 7 des approfondissements du chapitre N1, démontre que p est pair.
- p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$. Calcule alors q^2 .
Que peux-tu en déduire pour la parité de q ? Que peux-tu dire de la fraction $\frac{p}{q}$?