Activité 1 : Multiple, diviseur

1. Le jeu de Juniper-Green

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec les nombres entiers de 1 à 40.
Le premier joueur choisit un nombre entier.
Le deuxième joueur doit en choisir un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre et toujours parmi les nombres entiers de 1 à 40.
Le joueur suivant en choisit encore un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur du second nombre. Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné !

a. Jouez à ce jeu, en alternant le premier joueur.

b. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ? Même question avec 17 ; 9 et 23.

c. Dans une partie à deux joueurs, quel nombre peut choisir le premier joueur pour être sûr de l'emporter (s'il joue bien !) ? Trouve toutes les possibilités.

2. Liste des diviseurs

Écris 54 comme un produit de deux entiers. Trouve toutes les possibilités.
Quelle est la liste des diviseurs de 54 ?
Trouve la liste des diviseurs de 720 (il y en a 30 !) et celle des diviseurs de 53.

3. Réponds aux questions suivantes en justifiant chaque réponse.
La somme de trois entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ?
Que peut-on dire de celle de cinq entiers consécutifs ?
La somme de n entiers consécutifs est-elle un multiple de n (n est un entier naturel) ?

Activité 2 : Division euclidienne

1. On veut partager équitablement un lot de 357 CD entre 12 personnes. Combien de CD aura chaque personne ? Combien de CD restera-t-il après le partage ?

2. Pose la division euclidienne de 631 par 17 puis écris 631 sous la forme $17 \times k + n$ où k et n sont des entiers naturels et $n < 17$.
Dans cette opération, comment s'appellent les nombres 631 ; 17 ; k et n ?

3. On considère l'égalité suivante : $983 = 45 \times 21 + 38$.
Utilise-la pour répondre aux questions suivantes, en justifiant et sans effectuer de division.

a. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 983 par 45 ? Par 21 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 990 par 45 ? De 953 par 21 ?

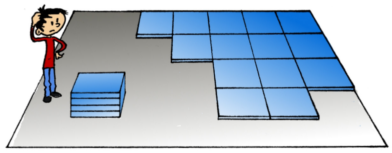
4. Que peux-tu dire du reste de la division euclidienne d'un multiple de 32 par 32 ?
Énonce une règle générale. La réciproque est-elle vraie ?

5. Histoires de restes, toujours...

a. Le reste dans la division euclidienne de m par 7 est 4 (m est un entier naturel).
Quelles valeurs peut prendre m ? Quelle forme a-t-il ?

b. Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

Activité 3 : Diviseurs communs, PGCD



1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm. Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ?
Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

2. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.
Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ? Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. PGCD

a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 4 : Vers la méthode des soustractions successives

1. Somme et différence de multiples

a. Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7 et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

b. Démontre la propriété suivante :

« Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

2. Vers la méthode des soustractions successives

a. Détermine le PGCD de 75 et 55 puis celui de 55 et 75 – 55.
Recommence avec celui de 91 et 130 et celui de 91 et 130 – 91.
Que peux-tu conjecturer ? Si cette conjecture est vraie, quel est son intérêt ?

b. La preuve

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Soient d le PGCD de a et b et d' le PGCD de b et $a - b$.

- En utilisant la propriété vue au **1.**, explique pourquoi $d \leqslant d'$.
- Montre que d' est à la fois un diviseur de b, de $a - b$ et de a. Compare d et d'.
- Conclus.

c. Trouve le PGCD de 2 724 et 714 en utilisant plusieurs fois la propriété précédente.

Activité 5 : Vers une nouvelle méthode

1. Le plus grand diviseur commun à 2 208 et 216 en un minimum d'étapes

a. Calcule le PGCD de 2 208 et 216 avec la méthode des soustractions successives.

b. Combien de fois as-tu soustrait 216 ? Quel est le nombre obtenu après avoir fini de soustraire 216 ? Comment aurais-tu pu prévoir cela ?

c. Déduis-en que l'on peut trouver, à l'aide d'une seule opération, un entier naturel n tel que : PGCD (2 208 ; 216) = PGCD (216 ; n) avec $n < 216$.
Que représente alors n pour cette opération ?

d. Récris le calcul du PGCD de 2 208 et 216 en utilisant un minimum d'opérations.

2. Recopie et complète la propriété utilisée précédemment (cette propriété sera admise) :
« Soient a et b deux entiers naturels avec $a \geqslant b$.
Le PGCD de a et b est égal au PGCD de b et de r où r est ... . ».

3. Trouve le PGCD de 1 639 et 176 en utilisant plusieurs fois cette propriété.
Combien y a-t-il d'étapes en utilisant la méthode des soustractions successives ?

Activité 6 : PGCD de deux nombres avec un tableur

Introduction : Pourquoi les méthodes pour trouver un PGCD vues dans les activités précédentes peuvent-elles aussi prendre le nom d'**algorithmes** ?

1. Algorithme des différences

On veut programmer avec un tableur la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	$a - b$
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$). »

a. Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir en A3 le plus grand des deux nombres qui sont en B2 et C2 ? Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir cette fois-ci en B3 le plus petit des deux nombres qui sont en B2 et C2 ?

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

2. Algorithme d'Euclide

On veut maintenant programmer la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	r
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$, r étant le reste de la division euclidienne de a par b, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r). »

a. Écris 672 sous la forme $210q + r$ où q et r sont des entiers naturels et $r < 210$.
Écris dans C2 la formule permettant de calculer r.

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

3. Copie les deux programmes précédents dans une même feuille de calcul, à côté l'un de l'autre et utilise-les simultanément pour déterminer le PGCD de 5 432 et de 3 894.
Quelle remarque peux-tu faire ?

Activité 7 : Simplification de fractions

1. Voici une liste de fractions :

$\frac{130}{150}$; $\frac{26}{30}$; $\frac{42}{49}$; $\frac{148}{164}$; $\frac{91}{105}$; $\frac{156}{180}$; $\frac{39}{45}$; $\frac{52}{60}$.

a. Construis une nouvelle liste en enlevant les intrus. Explique ta démarche.

b. Quelle fraction, ayant un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles, peut-on ajouter à cette nouvelle liste ?

c. Quel est le PGCD du numérateur et du dénominateur de la fraction trouvée dans la question **b.** ?
On dit que ces deux entiers sont **premiers entre eux** et que la fraction est **irréductible**.

d. Le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions de la nouvelle liste sont-ils premiers entre eux ? Justifie ta réponse.

2. Pour simplifier la fraction $\frac{84}{126}$, Malik a remarqué que $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

a. Quelle particularité ont les facteurs 2, 3 et 7 entrant dans la décomposition de 84 ?

b. Décompose 126 suivant le même principe puis simplifie la fraction pour la rendre irréductible. Comment peux-tu être sûr d'avoir obtenu une fraction irréductible ?

c. Recopie et complète : $\frac{... \times 5 \times 7 \times ...}{3^2 \times ....} = \frac{11}{35}$.

3. On donne les fractions suivantes : $\frac{256}{243}$; $\frac{1\,020}{1\,989}$; $\frac{382}{426}$; $\frac{313}{255}$.

a. Quelles sont les fractions irréductibles ? Justifie.

b. Écris les autres fractions sous forme irréductible à l'aide d'une seule simplification.

c. Soient a et b deux entiers naturels et d leur PGCD.

- Démontre que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont des entiers premiers entre eux.
- Déduis-en que $\frac{a \div d}{b \div d}$ est une fraction irréductible.

Activité 8 : Le point sur les nombres

Voici une liste de nombres :

$-27{,}2$; $\frac{10\,371}{100}$; $\frac{27}{13}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{21}{15}$; π ; $-\frac{10}{5}$; $\frac{47}{21}$; -15 ; $-\frac{10}{3}$; 37.

a. Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ? Lesquels ?

c. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire ? Lesquels ?