Exercices de synthèse

1 *Calculs numériques (fractions, puissances)*

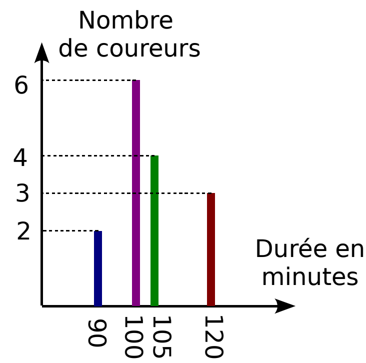
$A = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} \div \left(\frac{-16}{5}\right)$ $\quad B = \frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{7}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{3}}$ $\quad C = \frac{2 \times 10^3 \times 5 \times (10^{-5})^2}{2 + 18}$ $\quad D = \frac{7 \times 10^{-3}}{63 \times 10^{-5}}$

En précisant les différentes étapes des calculs, écrire chacune des expressions A, B et D sous forme de fractions irréductibles puis donner l'écriture scientifique de C.

2 *Synthèse en statistiques, proportionnalité*

Quinze amis ont participé à un semi-marathon (course à pied de 21 km).

Durée (en min)	90	100	105	120
Effectif	2			



a. Reproduire puis compléter le tableau à partir du diagramme.

b. Déterminer une médiane de la série statistique ainsi définie.

c. Calculer la moyenne puis l'étendue de cette série statistique.

d. Calculer la fréquence de coureurs arrivés en 120 minutes.

e. Quel est le pourcentage de coureurs arrivés en au moins 100 min ?

f. On suppose que les 9 premiers kilomètres sont en montée, les 12 autres sont en descente. Laurent a parcouru les 9 premiers kilomètres en 40 min et les 12 derniers kilomètres en 50 min.

- Calculer, en kilomètres par heure, la vitesse moyenne de Laurent en montée puis celle en descente et enfin celle sur le parcours total.
- Marc a couru, en moyenne, à 12 $km \cdot h^{-1}$ en montée et à 16 $km \cdot h^{-1}$ en descente. Calculer la durée de sa course.

g. Marc débute dans le semi-marathon. Au repos, son rythme cardiaque moyen est de 80 pulsations par minute. En s'entraînant, il doit apprendre à stabiliser son rythme cardiaque pendant l'effort à 145 pulsations par minute.
Calculer le pourcentage d'augmentation de son rythme cardiaque entre le repos et l'effort.

h. Après des années d'entraînement, un sportif peut faire baisser son rythme cardiaque au repos de 30 %. Si un sportif de haut niveau a un rythme cardiaque de 56 pulsations par minute au repos, quel devait être son rythme cardiaque au repos avant qu'il ne se mette au sport ?

3 *Problèmes de fractions, PGCD*

a. Dans un club sportif, $\frac{1}{12}$ des adhérents ont moins de 30 ans et les $\frac{3}{4}$ des autres ont plus de 50 ans.
Calculer la fraction des adhérents qui ont entre 30 et 50 ans.

b. Déterminer le PGCD des nombres 693 et 819 puis en déduire la forme irréductible de $Q = \frac{693}{819}$.

c. On pose $N = Q + \frac{80}{13}$. Démontrer que N est un nombre entier.

d. Calculer le PGCD de 462 et 65. Que peut-on en déduire pour la fraction $C = \frac{462}{65}$?

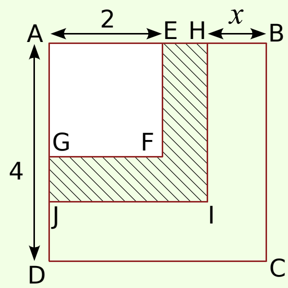
4 *Racines carrées et géométrie*

a. On donne $AB = 2\sqrt{11}$ cm ; $AC = \sqrt{154}$ cm et $BC = 3\sqrt{22}$ cm.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en précisant en quel point.

b. Calculer, sous forme exacte simplifiée, l'aire du triangle ABC puis l'aire de son cercle circonscrit.

Exercices de synthèse

5 *Calcul littéral en géométrie (d'après Brevet des Collèges)*



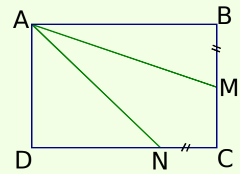
a. Dans la figure ci-contre, AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés.
Calculer AH en fonction de x, en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.
M = $(4 - x)^2 - 2^2$ N = $(4 - x - 2)^2$ P = $4^2 - x^2 - 2^2$

b. Développer et réduire l'expression Q = $(4 - x)^2 - 2^2$.

c. Factoriser Q.

d. Calculer Q pour $x = 2$. Que traduit ce résultat pour la figure ?

6 *Géométrie, fonction, équation d'après Brevet des Collèges*



ABCD est un rectangle tel que AB = 6 cm et AD = 4 cm. On pose BM = CN = x.

a. On suppose dans cette question que $x = 2$. Calculer AM.

b. Toujours pour $x = 2$, montrer que AMCN a une aire de 10 cm^2.

c. Pour les questions **c.** et **d.**, x est à nouveau une longueur variable comprise entre 0 et 4 cm.

- Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.
- Calculer DN en fonction de x puis l'aire du triangle ADN en fonction de x.

d. On considère les deux fonctions $f_1 : x \longmapsto f_1(x) = 3x$ et $f_2 : x \longmapsto f_2(x) = 12 - 2x$.
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$. Si x est une solution de cette équation, comment cela se traduit-il sur la figure ?

7 *Fonction, racines carrées, équations (vers la seconde)*

a. Soit la fonction h définie par $h(x) = 4x^2 - 20x - 1$. Reproduire puis compléter le tableau de valeurs en calculant les images des nombres donnés. (Noter les résultats sous forme exacte simplifiée.)

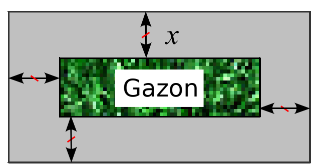
x	-1	$\frac{3}{2}$	$2\sqrt{3}$	$1-\sqrt{5}$
$h(x)$				

b. Déterminer le (ou les) nombre(s) ayant pour image -1 par h (soit le (ou les) antécédent(s) de -1).

c. Résoudre l'équation $h(x) = -26$.

8 *Géométrie, fonction, équation*

M. Tondu possède un terrain rectangulaire dont la longueur, 124 m, est le double de la largeur.
Ce terrain est entouré d'une allée de x mètres de large, le reste est recouvert de gazon.



a. Exprimer, en fonction de x :

- le périmètre du gazon et noter f la fonction correspondante ;
- l'écart entre le périmètre du terrain et celui du gazon et noter g la fonction correspondante ;
- l'aire de l'allée.

b. Quelle est la nature des fonctions f et g ? Tracer leurs représentations graphiques. Quels sont les éléments caractéristiques de ces deux représentations ?

c. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

d. Interpréter la solution de l'équation précédente en comparant alors le périmètre du terrain à celui de la partie recouverte de gazon.

Exercices de synthèse

9 *Pythagore, Thalès et trigonométrie, agrandissement*

a. Construire un triangle ABC tel que AC = 4,5 cm ; AB = 7,5 cm et BC = 6 cm. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par B coupe la droite (AC) en D. En exprimant de deux façons tan $\widehat{BAC}$, montrer que BD = 10 cm.

c. En déduire que AD = 12,5 cm.

d. Placer le point N du segment [AB] tel que AN = 2,7 cm. Prouver que (BD) // (NC).

e. En déduire la longueur NC en centimètres.

f. La parallèle à la droite (AB) passant par C coupe la droite (BD) en M. Prouver que MD = 6,4 cm.

g. Quelle est la nature du quadrilatère NBMC ? En déduire la longueur MN en centimètres.

h. On réalise une maquette correspondant à la figure de cet exercice où l'aire du quadrilatère NBMC vaut alors 17,28 dm^2. Calculer l'échelle de l'agrandissement correspondant à cette réalisation.

i. En déduire la longueur m du segment de la maquette correspondant au segment [MN] de la figure.

10 *Cercle, Pythagore, Thalès et trigonométrie d'après Brevet des Collèges*

L'unité de longueur est le centimètre. Tracer un segment [AB] tel que AB = 12.
Placer le point H du segment [AB] tel que AH = 1.
Tracer ensuite un demi-cercle de diamètre [AB] et la perpendiculaire en H à la droite (AB).
On note C le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le demi-cercle.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Exprimer de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$. En déduire que AC = $2\sqrt{3}$.

c. Donner la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

d. Placer le point D de la droite (BC) tel que B, C et D soient dans cet ordre et que CD = 6.

- Calculer la valeur exacte de la longueur AD sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers positifs.
- Calculer la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{ADC}$.

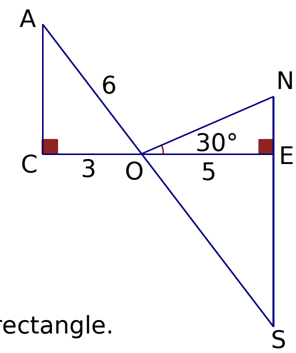
e. Placer le point E du segment [AD] tel que AE = 2 et le point F du segment [AC] tel que $\widehat{AEF}$ = 30°.

- Démontrer que les droites (EF) et (DC) sont parallèles.
- Calculer la longueur AF.

11 *Pythagore, Thalès et trigonométrie (valeurs exactes)*

La figure donnée dans cet exercice n'est pas en vraie grandeur, il n'est pas demandé de la reproduire.
L'unité de longueur est le centimètre et on donne :

- EO = 5, OC = 3 et OA = 6 ;
- E, O et C sont alignés et (AO) coupe (NE) en S ;
- les triangles ENO et OAC sont respectivement rectangles en E et en C.



a. Démontrer par le calcul que AC = $3\sqrt{3}$.

b. Montrer que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.
Calculer alors les valeurs exactes de OS et ES.

c. Calculer la valeur exacte de ON en utilisant $\widehat{NOE}$ = 30° et cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COA}$ puis démontrer que le triangle SON est rectangle.

Exercices de synthèse

12 *Boule, fonction linéaire et tarif, moyenne, pourcentages*

Les trois parties du problème suivant sont indépendantes.

Partie A : Une entreprise fabrique des saladiers ayant la forme d'une demi-sphère de rayon 12 cm.

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume du saladier en fonction de π.

b. Une ménagère a besoin de 1,5 L de lait pour faire des crêpes.
Pourra-t-elle utiliser ce type de saladier pour les préparer ?

Partie B : Les saladiers sont vendus 5,50 € pièce.

a. Quel est le prix de vente de 800 saladiers ?

b. Soit n le nombre de saladiers achetés par un supermarché.
Exprimer, en fonction de n, le prix $f(n)$ en euros qu'il paiera au fabricant.
Déterminer l'antécédent de 6 600 par la fonction f et interpréter ce résultat.

c. Après avoir précisé sa nature et ses éléments caractéristiques, représenter graphiquement la fonction f. Unités du graphique : abscisse, 1 cm pour 200 saladiers ; ordonnée, 1 cm pour 1 000 €.

d. En effectuant une lecture graphique, mettre en évidence l'antécédent calculé à la question **b.**.

Partie C : Le responsable du supermarché a relevé le nombre de saladiers vendus par chacun de ses quatre vendeurs et l'a inscrit dans le tableau suivant.

Nom du vendeur	Karim	Anna	Halsa	Jean
Nombre de saladiers vendus	220	200	290	250

a. Quel est le pourcentage de vente d'Anna (arrondi à 0,1) par rapport au nombre total de ventes ?

b. Quel est le nombre moyen de saladiers vendus par vendeur ?

c. Le responsable du supermarché affirme qu'il a vendu 80 % de son stock de saladiers.
Combien avait-il acheté de saladiers ?

d. Il affirme aussi que, cette année, il s'est vendu 4 % de saladiers de moins que l'année dernière.
Quel nombre de saladiers avait vendu le supermarché l'année dernière ?

13 *Problèmes de tarifs, fonctions affines, équations et inéquations*

Un vidéo-club propose différents tarifs pour l'emprunt de DVD :

- Tarif A : 4 € par DVD emprunté.
- Tarif B : 2,50 € par DVD emprunté, après avoir payé une carte d'abonnement de 18 €.
- Tarif C : abonnement de 70 € pour un nombre illimité de DVD.

a. Lucas compte emprunter 5 DVD, combien paiera-t-il suivant chaque tarif ? Même question pour Bill qui veut en emprunter 15, puis pour Smaïl qui en veut 25 (rassembler les résultats dans un tableau).

b. On désigne par x le nombre de DVD empruntés. Exprimer, en fonction de x, le prix à payer suivant les trois tarifs. Noter f, g et h les trois fonctions correspondantes.

c. Tracer dans un même repère les représentations graphiques de ces trois fonctions après avoir précisé leurs natures. On prendra en abscisse, 1 cm pour 2 DVD et en ordonnée, 1 cm pour 5 €.

d. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'équation $4x = 2{,}5x + 18$. Interpréter le résultat.

e. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $70 < 2{,}5x + 18$. Interpréter le résultat.

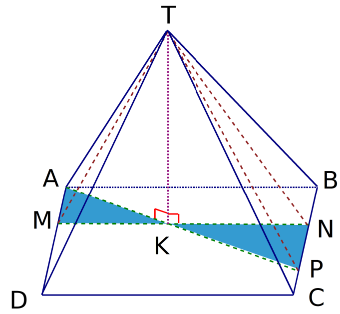
Omar, le copain de Lucas, va dans un autre vidéo-club. Il a une formule d'abonnement du même type que celle correspondant au tarif B mais n'a pas dit à Lucas son prix de location pour un DVD ni combien coûte la carte d'abonnement. Il lui a juste dit qu'il payait 45 € pour 10 DVD et 65 € pour 20 DVD.

f. On note k la fonction qui, au nombre x de DVD empruntés par Omar, fait correspondre le prix qu'il paye en euros. Déterminer l'expression de $k(x)$ en fonction x.

g. Vérifier que pour 8 DVD empruntés, Omar ferait mieux de changer de vidéo-club mais pas pour 18 DVD. Puis déterminer à partir de combien de DVD il ferait mieux de changer de vidéo-club.

Exercices de synthèse

14 *Pyramides, Thalès et Pythagore, équations, fonction*



Dans tout ce problème, l'unité est le centimètre.
Tracer un rectangle ABCD tel que AB = 15 et AD = 9,6.
Placer le point P du segment [BC] tel que $\frac{BP}{BC} = \frac{5}{6}$.

M est un point quelconque de [AD] tel que AM < 8 et on pose AM = x.
La parallèle à (AB) passant par M coupe [BC] en N et [AP] en K.
On considère trois pyramides de même hauteur [TK] :
P_1 est la pyramide TABCD ; P_2 est la pyramide TAMK et P_3 est la pyramide TPNK.

Partie A :

a. On se place dans le triangle ABP où on remarque que BP = 8. Démontrer que AP = 17.

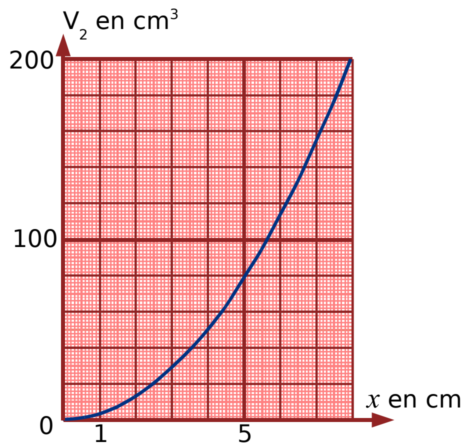
b. Exprimer, en fonction de x, la longueur PN puis la longueur NK.

c. Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle PNK.

d. Montrer que MK = $\frac{15}{8}x$ et en déduire l'aire du triangle AMK en fonction de x.

e. Déterminer x pour que l'aire du triangle AMK soit égale à l'aire du rectangle ABCD divisée par 15.

f. Les triangles AMK et PNK peuvent-ils avoir la même aire ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?



Partie B : On donne TK = 10 cm.

a. Calculer le volume V_1 de P_1.

b. Exprimer en fonction de x le volume $V_2(x)$ en cm^3 de P_2.

c. Pour quelle valeur exacte de x a-t-on 36 $V_2 = V_1$?

d. Déterminer par lecture graphique :
- l'image de 6 par V_2 ;
- l'antécédent de 50 par V_2.

e. Retrouver les résultats précédents par des calculs.

15 *Fonction, équations (vers la seconde)*

Dans un triangle RST rectangle en R, on donne RS = 6 et RT = 5 (l'unité est le centimètre).
M est un point de [RS], la parallèle à [RT] passant par M coupe [ST] en N et la parallèle à [RS] passant par N coupe [RT] en P, formant ainsi un rectangle RMNP.
On pose RM = x (x est un nombre compris entre 0 et 6).

a. Faire une figure pour x = 2 puis calculer l'aire du rectangle RMNP.

b. Exprimer MN en fonction de x et en déduire l'aire A du rectangle RMNP en fonction de x.

c. Calculer x pour que l'aire A du rectangle RMNP soit égale à la moitié de celle du triangle RST.

d. Pour la valeur de x trouvée à la question précédente, où se trouve le point M ?

e. On a représenté ci-contre l'aire A en fonction de x.
Déterminer graphiquement :
- le (ou les) antécédent(s) de $\frac{25}{6}$;
- la valeur maximale prise par l'aire A ;
- la valeur de x correspondant à ce maximum.

f. Que vaut l'aire du triangle RST lorsque A est maximale ?

g. Reproduire cette courbe à partir d'un tableur.