Activité 1 : À partir d'une situation connue

1. Prix en fonction de la masse

Chez un fromager, on peut lire sur l'étiquette d'un morceau de fromage que sa masse est de 0,8 kg et son prix de 12 €.

a. Calcule le prix de 100 g de ce fromage de plusieurs façons différentes.
Calcule le prix de 0,9 kg de plusieurs façons différentes.

b. Quelle est la masse d'un morceau coûtant 18 € ? Trouve plusieurs façons de calculer cette masse.

c. Si p € représente le prix d'un morceau de fromage et m kg sa masse, quelle(s) relation(s) lie(nt) les nombres p et m ? Que peux-tu dire des deux grandeurs précédentes ?

2. Avec une fonction

a. Trouve une fonction f pour laquelle, si p € représente le prix d'un morceau de fromage et m kg sa masse alors $f(m) = p$.

b. Traduis les calculs effectués dans les questions **a.**, **b.** et **c.** de la partie **1.** à l'aide de cette fonction et en utilisant le vocabulaire « image » et « antécédent ».

c. Quelle est l'image de $\frac{4}{7}$ par f ? Calcule $f(-3)$. Détermine l'antécédent de 2.

d. Compare $f(4)$ et $5 \times f(0{,}8)$ puis $f(1{,}2)$ et $f(0{,}8) + f(0{,}4)$. Illustre tes réponses en utilisant la situation de la question **1.**. Quelles conjectures peux-tu faire ?

3. Dans le cas général

a. Soit g la fonction définie par $g(x) = ax$ où a est un nombre non nul donné. (On dit que g est une fonction linéaire et a s'appelle son coefficient.) Démontre que, pour tous nombres x_1, x_2, x et k, $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ et $g(k \times x) = k \times g(x)$.

b. On sait que h est une fonction linéaire et que $h(5) = 7$. En utilisant les propriétés précédentes, calcule :

- $h(6)$ (Tu peux remarquer que $6 = \frac{6}{5} \times 5$.) ;
- $h(11)$ (de deux façons !).

Activité 2 : Augmentation, diminution

1. Un magasin augmente tous ses prix de 8 %.

a. Calcule le prix après augmentation d'un article qui coûtait initialement 28,25 €.
Un autre article coûte après augmentation 52,38 €. Quel était son prix initial ?

b. Si p_1 € représente le prix d'un article avant cette augmentation et p_2 € son prix augmenté, détermine la fonction qui, au nombre p_1, associe le nombre p_2.

c. Que peux-tu dire de cette fonction ?

d. Quelle est l'image de 28,25 par cette fonction ? L'antécédent de 52,38 ?

2. La population d'un village a diminué de 15 % en trente ans. Il compte aujourd'hui 289 habitants. Quelle était sa population il y a trente ans ?

Activité 3 : Bande de papier

On considère une bande de papier rectangulaire de dimensions 4 cm et l cm.
On s'intéresse aux variations de son périmètre en fonction de ses dimensions.

1. Recopie et complète le tableau suivant.

Valeurs de l en cm	0,5	1	2,5	4	6		10
Valeurs du périmètre en cm						25	

Quel(s) calcul(s) permet(tent) de passer des valeurs de l en centimètres aux valeurs du périmètre en centimètres ? Que peux-tu dire de ce tableau ?

2. Avec une fonction

a. Si l cm représente la deuxième dimension de la bande de papier et p cm son périmètre, détermine la fonction f telle que $f(l) = p$.
Cette fonction est-elle une fonction linéaire ? Justifie ta réponse.

b. Quelle est l'image de 2,5 par f ? Que vaut $f(10)$?
Calcule $f\left(\frac{7}{3}\right)$ puis $f(-5)$.
Quel est l'antécédent de 25 ? Détermine celui de -3.

c. Compare $f(10)$ et $4 \times f(2,5)$ puis $f(10)$ et $f(4) + f(6)$.

3. Variations du périmètre

Tu pourras construire une bande de papier de largeur 4 cm et de longueur suffisante pour t'aider à répondre aux questions suivantes.

a. On suppose que $l = 5$ cm. Calcule le périmètre de la bande de papier.

- On augmente l de 3 cm. Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ? Et si l augmente de 4 cm ?
- On enlève 2 cm à l. Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ?

b. Reprends la question **a.** avec cette fois-ci $l = 12,5$ cm.

c. Que constates-tu pour la variation du périmètre lorsqu'on a augmenté l de 3 cm ?
Semble-t-elle dépendre de la valeur de l ? Démontre-le.

d. Retrouves-tu les réponses de la question **c.** pour une augmentation de l de 4 cm ?
Et pour une diminution de l de 2 cm ?

e. Recopie et complète le tableau suivant sachant que p_1 cm et p_2 cm sont les périmètres de deux bandes dont les dimensions sont 4 cm et respectivement l_1 cm et l_2 cm.

$l_1 - l_2$	0	1	1,5	3	4	-1	-2
$p_1 - p_2$							

Que peux-tu dire de ce tableau ? Justifie ta réponse.

4. Accroissement

f étant la fonction établie dans la question **2.**, x_1 et x_2 étant deux nombres quelconques, exprime $f(x_1) - f(x_2)$ en fonction de $x_1 - x_2$. Conclus.

Activité 4 : Graphique (1)

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = 3x$.

a. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

x	– 6	– 4	– 1,5	– 1	0	1	2,5	5	7
$g(x)$									

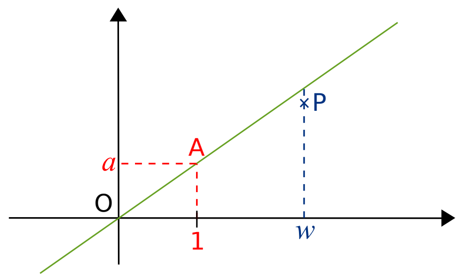
b. Sur une feuille de papier millimétré, construis un repère orthogonal et place tous les points de coordonnées $(x ; y)$ avec $y = g(x)$ que tu as obtenus grâce au tableau de la question précédente. Que constates-tu ? Pouvais-tu le prévoir ?

2. Cas général

On considère maintenant une fonction linéaire f de coefficient a (a est un nombre non nul). Dans un repère orthogonal d'origine O, on considère le point A$(1 ; a)$.

a. Démontre que si un point M de coordonnées $(r ; s)$ appartient à la droite (OA) alors $s = f(r)$.

b. Le point P ci-contre a pour coordonnées $(w ; aw)$. Est-il bien placé ?
Justifie ta réponse. (Tu pourras utiliser le résultat démontré à la question précédente.)



(schéma réalisé pour a positif)

3. Coefficient

a. Lorsque le coefficient d'une fonction linéaire est négatif, que peux-tu dire de la direction de sa droite représentative ?

b. Représente, dans un repère orthogonal, la fonction h telle que $h(x) = \frac{4}{3}x$.

Justifie et illustre sur le graphique la phrase : « Lorsque la différence entre les abscisses de deux points de la droite représentative de h est 3, la différence entre les ordonnées est 4. ».

c. Dans un repère orthonormé, quel lien y a-t-il entre le coefficient de la fonction linéaire et l'angle que fait la droite représentative avec l'axe des abscisses ?

Activité 5 : Graphique (2)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$.

1. Dans un repère orthogonal, place cinq points dont les coordonnées sont du type $(x ; y)$ avec $y = f(x)$. Que remarques-tu ?

2. Sur le même graphique, représente la fonction $g : x \longmapsto 2x$.

3. Étant donnés deux points R et T de la représentation graphique de f et R_1 et T_1 les points de la droite (d_g) représentative de g ayant les mêmes abscisses que R et T, justifie que (RT) est parallèle à (R_1T_1).

4. Justifie et illustre sur le graphique : « Lorsque la différence entre les abscisses de deux points de la représentation graphique de f est 1, la différence entre les ordonnées est 2. ».

Activité 6 : Trouver la fonction

1. À partir d'un graphique

a. Sur une feuille de papier millimétré, construis dans un repère orthogonal la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées (2 ; 6) et la droite passant par les points de coordonnées (0 ; 3) et (2 ; – 1).

b. En utilisant seulement le graphique et sans faire de calcul, détermine les fonctions dont ces droites sont les représentations graphiques.

c. Contrôle, par le calcul, les réponses trouvées à la question précédente.

d. Bakari prétend qu'à la vue du graphique précédent, un nombre et un seul a la même image par les deux fonctions trouvées.
Justifie son affirmation. Détermine ce nombre graphiquement puis par le calcul.

2. Par le calcul

a. Jean dit qu'il a trouvé une fonction linéaire par laquelle – 8 a pour image 5 et 3 a pour image – 2. Qu'en penses-tu ?

b. On cherche une fonction affine f telle que $f(-2) = 5$. Chloé a trouvé les fonctions suivantes :

$$x \longmapsto x^2 + 1\ ;\quad x \longmapsto x + 7\ ;\quad x \longmapsto \frac{-5}{2}x\ ;\quad x \longmapsto -2x + 1.$$

Qu'en penses-tu ? Peux-tu en trouver d'autres vérifiant les conditions ?

c. $g(4) = -1$ et $g(2) = 3$ avec $g(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels à trouver.

- Écris un système d'équations dont le couple $(a\ ;\ b)$ est solution. Résous-le.
- Ahmed dit qu'en utilisant la « proportionnalité des accroissements », il a trouvé la valeur de a très rapidement. Comment a-t-il fait ?
  Comment trouver la valeur de b ensuite ?

Activité 7 : Système d'équations

On considère le système d'équations $\begin{cases} -3x + y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$.

1. Montre que si le couple de nombres $(r\ ;\ s)$ est solution de la première équation alors $s = f(r)$ où f est une fonction que tu préciseras.

2. Montre que pour tout couple de nombres $(u\ ;\ v)$ solution de la deuxième équation, $v = g(u)$ où g est une fonction que tu préciseras.

3. Avec la représentation graphique

a. Représente graphiquement les fonctions f et g dans un même repère orthogonal.

b. Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

c. Que peux-tu en déduire pour le système d'équations ci-dessus ?

4. Écris deux systèmes d'équations, l'un n'ayant pas de solution, l'autre en ayant une infinité.

Méthode 1 : Reconnaître une fonction affine ou linéaire, calculer l'image d'un nombre

À connaître

On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.

On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x$) où a est un nombre.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

Exemple : Soient les fonctions f, g et h telles que $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 5x - 2$.
Indique, en justifiant, si les fonctions précédentes sont affines, linéaires ou ni l'un ni l'autre ; calcule ensuite l'image de 3 par la fonction f et celle de -7 par la fonction h.

- $f(x) = 2 \times x$ donc la fonction f est **linéaire** avec $a = 2$.
- La fonction g n'est ni affine ni linéaire car on doit élever x au carré.
- $h(x) = 5 \times x + (-2)$ donc la fonction h est **affine** avec $a = 5$ et $b = -2$.

- $f(3) = 2 \times 3$ On remplace x par 3.
  $f(3) = 6$ On calcule.
  L'image de 3 par la fonction f est 6.
- $h(-7) = 5 \times (-7) - 2$
  $h(-7) = -37$
  L'image de -7 par la fonction h est -37.

Exercices « À toi de jouer »

1 Indique, en justifiant, si les fonctions sont linéaires, affines ou ni l'un ni l'autre.
$f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = 8 - 9x$; $h(x) = \dfrac{3}{5}x$; $k(x) = (13 - 8x)^2 - 64x^2$; $l(x) = \dfrac{2}{x}$.

2 Détermine l'image de -4 par la fonction affine h définie par $h(x) = -8x + 3$.

Méthode 2 : Déterminer, par le calcul, l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : On définit les fonctions f et g par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 12$.
Détermine l'antécédent de 7 par la fonction f et l'antécédent de 13 par la fonction g.

On cherche le nombre x qui a pour image 7 par la fonction f. L'image de x est $f(x)$ donc on résout l'équation :

$$f(x) = 7$$
$$2x = 7$$
$$x = 3{,}5$$

L'antécédent de 7 par f est donc 3,5.

On cherche le nombre x qui a pour image 13 par la fonction g.
L'image de x est $g(x)$, on résout donc l'équation $g(x) = 13$ c'est-à-dire :

$$5x - 12 = 13$$
$$5x = 25$$
$$x = 5$$

L'antécédent de 13 par g est donc 5.

Exercice « À toi de jouer »

3 Détermine l'antécédent de -6 par la fonction affine h définie par $h(x) = -x + 3$.

Méthode 3 : Représenter graphiquement une fonction affine ou linéaire

À connaître

Un repère étant défini, dire qu'un point appartient à la **représentation graphique de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$** signifie que ses coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ c'est-à-dire $y = ax + b$.
La représentation graphique **d'une fonction affine** est **une droite**.
Dans le cas de la **fonction linéaire**, cette droite passe par l'origine du repère.

Remarque : a s'appelle le **coefficient directeur**, il indique la direction de la droite représentative : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1 (c'est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et de x).

b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$, la droite passe par le point $(0\ ;\ b)$.

Exemple : Représente graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ et la fonction j définie par $j : x \longmapsto -2x$.

f est affine donc sa représentation graphique est une droite.
Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points.

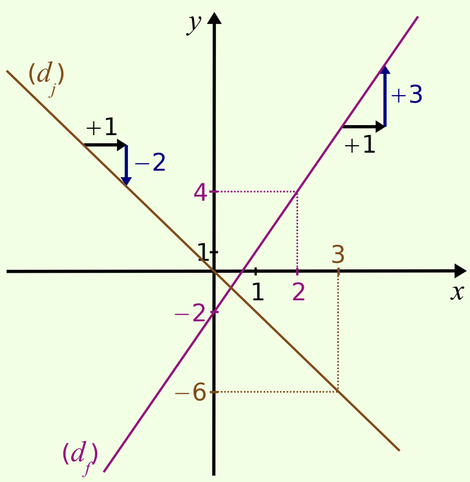
On établit un tableau de valeurs en calculant les images de deux nombres.

Valeurs de x	0	2
Valeurs de $f(x)$	– 2	4
Points de la droite	(0 ; – 2)	(2 ; 4)

j est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître un de ses points : on calcule l'image d'un nombre.

Valeur de x	3
Valeur de $j(x)$	– 6
Point de la droite	(3 ; – 6)



On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes.

- Pour la fonction f, en violet :

on place dans le repère les points de coordonnées (0 ; – 2) et (2 ; 4).

On trace la droite (d_f) passant par ces deux points.

- Pour la fonction j, en marron :

on place dans le repère le point de coordonnées (3 ; – 6).

On trace la droite (d_j) passant par ce point et l'origine du repère.

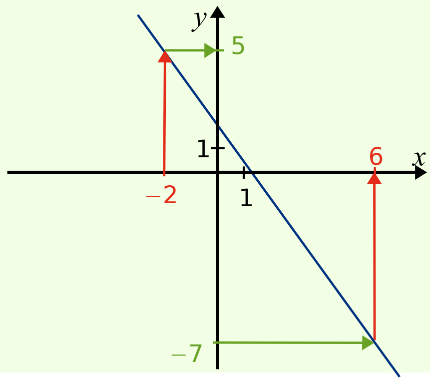
Exercices « À toi de jouer »

4 Trace les représentations graphiques des fonctions l et m définies par $l(x) = -0{,}5x$ et $m(x) = -0{,}5x + 2$. Que constates-tu ?

5 Comment tracer précisément la représentation graphique de la fonction qui, à x, associe $0{,}75x$?

Méthode 4 : Déterminer graphiquement l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée q.
Lis l'image de – 2 et l'antécédent de – 7.



Pour lire l'image de – 2 :
L'image de – 2 est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse – 2.
On lit approximativement 5.
Donc l'image de – 2 par la fonction q est environ 5.

Pour lire l'antécédent de – 7 :
L'antécédent de – 7 est l'abscisse du point de la droite d'ordonnée – 7.
On lit approximativement 6.
Donc l'antécédent de – 7 par la fonction q est environ 6.

Exercice « À toi de jouer »

6 Lis approximativement ci-dessus l'image de 3, celle de 0 et l'antécédent de – 3,5.

Méthode 5 : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.

f étant linéaire, on a $f(x) = ax$ où a est le coefficient de cette fonction à déterminer.
$f(5) = 4$ et $f(5) = 5a$ donc $5a = 4$. On en déduit $a = \frac{4}{5}$ et f est définie par $f(x) = \frac{4}{5}x$.

Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(5) = 4$ et $g(-2) = 25$.

La fonction g est affine donc $g(x) = ax + b$ où a et b sont à déterminer.

$g(5) = 4$ et $g(5) = 5a + b$ donc $5a + b = 4$.
$g(-2) = 25$ et $g(-2) = -2a + b$ donc $-2a + b = 25$.

Donc $\begin{cases} 5a + b = 4 \\ -2a + b = 25 \end{cases}$.

On résout donc le système et on obtient $a = -3$ et $b = 19$. Ainsi g est définie par :
$$g(x) = -3x + 19.$$

Remarque : a est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $g(x)$ et de x donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Donc, ici, $a = \frac{g(-2) - g(5)}{-2-5} = \frac{25-4}{-2-5} = \frac{21}{-7} = -3$ et $g(x) = -3x + b$.
b s'obtient ensuite en utilisant $g(5) = 4$ ou $g(-2) = 25$.

Exercice « À toi de jouer »

7 Détermine la fonction affine h telle que l'image de – 5 soit égale à 12 et celle de 4 soit égale à – 7.

Linéaire ou affine ?

1 Parmi les fonctions f, g, h et m définies ci-dessous, indique celles qui sont linéaires.

a. $f(x) = 2x$

b. $h(x) = 3x - 4$

c. $g(x) = x^2$

d. $m(x) = (5 - 2x) - 5$

2 Parmi les fonctions n, p, k et d définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $n(x) = 5x$

b. $k(x) = 2x + 7$

c. $p(x) = \dfrac{1}{x}$

d. $d(x) = (4x - 7) - 4x$

3 Parmi les fonctions t, u, w et z définies ci-dessous, indique celles qui sont affines (en précisant celles qui sont linéaires) et celles qui ne sont ni linéaires ni affines.

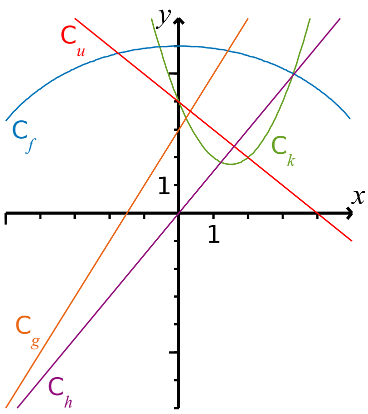
a. $t(x) = -x$

b. $u(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

c. $w(x) = (x + 9)^2 - x^2$

d. $z(x) = (3x - 1)^2 - 3x^2$

4 Sur le graphique ci-dessous, des fonctions f, g, h, k et u ont été représentées.



Parmi ces fonctions, indique celles qui sont affines. (Tu préciseras celles qui sont linéaires.)

5 Un rectangle a pour longueur 7 cm et pour largeur x cm.

a. Exprime le périmètre $p(x)$, en cm, et l'aire $a(x)$, en cm², de ce rectangle en fonction de x.

b. Les fonctions p et a sont-elles linéaires ? Sont-elles affines ?

6 Le côté d'un carré mesure x cm.

a. Exprime le périmètre $p(x)$, en cm, et l'aire $a(x)$, en cm², de ce carré en fonction de x.

b. Les fonctions p et a sont-elles linéaires ? Sont-elles affines ?

Images et antécédents

7 La fonction f est définie par $f(x) = 8x$.

a. Détermine $f(2)$; $f(-3)$ et $f(0)$.

b. Quelle est l'image de -5 par la fonction f ? Et celle de $\dfrac{1}{8}$?

c. Détermine les antécédents, par la fonction f, des nombres -16 ; 0 et 28.

8 La fonction g est définie par $g(x) = 5x + 1$.

a. Quelle est l'image de 5 par la fonction g ?

b. Détermine $g(0)$; $g(-2{,}1)$ et $g(7)$.

c. Détermine les antécédents, par la fonction g, des nombres 21 ; -14 et 0.

9 La fonction h est définie par $h : x \longmapsto -6x$.

a. Détermine les images, par la fonction h, des nombres 0 ; -5 et $\dfrac{1}{3}$.

b. Calcule $h(-1)$ et $h(3{,}5)$.

c. Détermine les antécédents, par la fonction h, des nombres 24 ; -42 et $-\dfrac{3}{4}$.

10 k est définie par $k : x \longmapsto 2x - 5$.

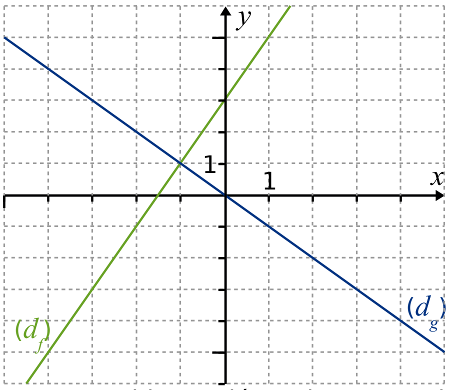
a. Détermine l'image, par la fonction k, de $\dfrac{1}{3}$.

b. Calcule $k(-4)$.

c. Résous l'équation $k(x) = \dfrac{5}{3}$. Que peux-tu dire de la solution de cette équation ?

11 La fonction g est une fonction linéaire telle que $g(3) = 4$.
En utilisant les propriétés d'une telle fonction, calcule les images des nombres 1,5 ; 6 et 7,5.

12 Le graphique ci-dessous représente des fonctions f et g.



Par lecture graphique, détermine pour chaque fonction :

a. les images des nombres 0 ; 1 et – 4.

b. les antécédents des nombres 3 ; – 5 et 5.

Représentation graphique

13 La fonction linéaire h est définie par $h(x) = -1{,}5x$.

a. Quelle est la nature de la représentation graphique de cette fonction ?

b. Combien de points sont nécessaires pour construire la représentation graphique de cette fonction ?

c. Détermine les coordonnées de suffisamment de points avec des abscisses comprises entre – 4 et 4.

d. Construis la représentation graphique en prenant 1 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 2 unités en ordonnée.

14 La fonction affine m est définie par $m(x) = 3x - 5$.

a. Quelle est la nature de la représentation graphique de cette fonction ?

b. Combien de points sont nécessaires pour construire la représentation graphique de cette fonction ?

c. Détermine les coordonnées de suffisamment de points avec des abscisses comprises entre – 3 et 3.

d. Construis la représentation graphique en prenant 1 cm pour 1 unité en abscisse et en ordonnée.

15 Représente les fonctions définies ci-dessous dans un même repère orthogonal avec des couleurs différentes.

- $d : x \longmapsto -2x + 1$
- $u : x \longmapsto 3x - 4$
- $h : x \longmapsto -x + 3$
- $t : x \longmapsto 2$
- $k : x \longmapsto 2{,}5x$
- $m : x \longmapsto -2x - 3$

Que peux-tu dire des représentations graphiques des fonctions d et m ?

À ton avis, pourquoi ?

16 Représente les fonctions définies ci-dessous dans un même repère orthogonal avec des couleurs différentes.

a. $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 5$

b. $h : x \longmapsto \frac{2}{5}x + 1$

c. $g : x \longmapsto -\frac{5}{6}x + 5$

d. $k : x \longmapsto -\frac{4}{3}x$

Déterminer une fonction

17 La fonction f est une fonction linéaire telle que $f(4) = 5$. Détermine la fonction f.

18 La fonction m est une fonction linéaire telle que $m(0) = 0$.
Peux-tu déterminer la fonction m ?

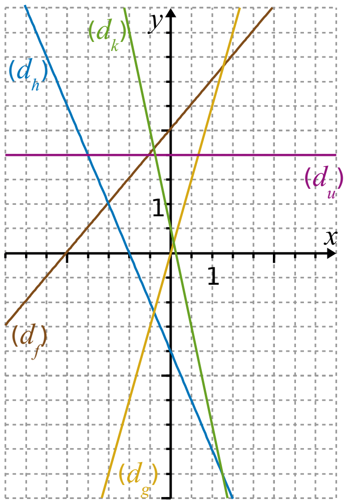
19 La fonction g est une fonction affine telle que $g(3) = 8$ et $g(-1) = -12$.
Détermine la fonction g.

20 La fonction w est affine telle que $w(0) = 4$ et $w(5) = 4$.
Détermine la fonction w.

21 La fonction h est une fonction linéaire telle que $h\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{3}{14}$.
Détermine la fonction h.

22 La fonction u est une fonction affine telle que $u\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$ et $u\left(\frac{5}{4}\right) = 22$.
Détermine la fonction u.

23 Sur le graphique ci-dessous, des fonctions f, g, h, k et u ont été représentées.



Détermine chacune des cinq fonctions.

24 La fonction h est une fonction affine telle que $h(2) = -1$ et $h(-1) = 5$.
Détermine l'image de 7 et l'antécédent du nombre -7, par la fonction h.

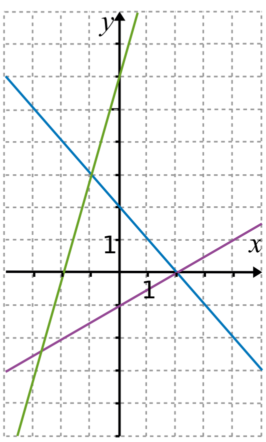
Problèmes

25 Sur le graphique ci-dessous, identifie les droites (d_f), (d_g) et (d_h) qui représentent les fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = 3x + 6$;

$g(x) = 0{,}5x - 1$;

$h(x) = -x + 2$.



a. Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) par le calcul.

b. Détermine celles du point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) également par le calcul.

c. Déduis-en, sans aucun calcul, les solutions de l'équation et de l'inéquation ci-dessous.

- $-x + 2 = 3x + 6$
- $0{,}5x - 1 < -x + 2$

Justifie ta réponse.

26 Représente les fonctions affines f et g définies ci-dessous dans un même repère orthogonal.

- $f(x) = 2x + 3$
- $g(x) = 3x - 1$

Résous graphiquement l'équation et l'inéquation suivantes.

- $2x + 3 = 3x - 1$
- $3x - 1 > 2x + 3$

27 *Mercredi, ce sont les soldes !*

Collées sur une vitrine, de grandes affiches annoncent une réduction de 30 % sur toute la boutique.

a. Une jupe à 80 € est soldée. Quel est son nouveau prix ? Détaille tes calculs.

b. Un article coûtant x € est soldé. Exprime $p(x)$, son nouveau prix, en fonction de x.

c. Cette fonction p est-elle linéaire ou affine ?

d. Représente cette fonction pour les valeurs de x comprises entre 0 € et 150 €, sur une feuille de papier millimétré. Tu placeras l'origine du repère orthogonal dans le coin inférieur gauche. Tu prendras 1 cm pour 10 € en abscisse et en ordonnée.

e. Lis sur le graphique le prix soldé d'un pull qui coûtait 50 €.

f. Lis sur le graphique le prix avant démarque d'un pantalon soldé à 84 €.

28 *Mutualisation des efforts*

Tous les employés d'une entreprise ont décidé de cotiser à la même assurance maladie. La cotisation correspond à 1,5 % de leur salaire brut et elle est prélevée directement sur le salaire.

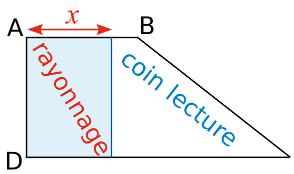
a. On appelle s le salaire brut mensuel.
Exprime en fonction de s le montant $c(s)$ de la cotisation de chacun.

b. Sophie est comptable dans cette entreprise. Elle est chargée de modifier le bulletin de paie, programmé sur un tableur.
Voici une partie de la feuille de calcul.

	A	B	C
1	Éléments	À payer	À déduire
2	Salaire brut	1600,00	
....			
12	Assurance maladie		

Quelle formule doit-elle programmer en C12 ?

29 Le CDI du collège Évariste Galois a la forme d'un trapèze. La documentaliste veut partager l'espace en deux parties de même aire, l'une rectangulaire, de largeur x mètres avec des rayonnages pour ranger les livres, l'autre pour faire un coin lecture.



On donne :

AB = 5 m ;
AD = 10 m
et DC = 8 m.

a. Calcule l'aire totale du CDI.

b. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

c. Exprime, en fonction de x, $r(x)$ l'aire de l'espace « rayonnage » et $c(x)$ l'aire de l'espace « coin lecture » en m^2.

d. Représente ces deux fonctions dans un même repère orthogonal. Choisis l'échelle pour que le graphique ait une largeur de 10 cm.

e. Détermine, par lecture graphique, la valeur de x pour laquelle les vœux de la documentaliste seront pris en compte.

30 *Tarifs*

Brahim décide d'aller régulièrement à la piscine pendant un an. Voici les tarifs proposés :

- tarif 1 : 100 € pour un an, nombre illimité d'entrées ;
- tarif 2 : 40 € d'adhésion par an puis 1 € par entrée ;
- tarif 3 : 2 € par entrée.

a. Quel prix paiera-t-il avec chaque tarif, s'il va à la piscine une fois par mois ? Quel tarif sera intéressant dans ce cas ?

b. On appelle x le nombre de fois où Brahim ira à la piscine. Exprime, en fonction de x, $t_1(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 1 ; $t_2(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 2 et $t_3(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 3.

c. Représente graphiquement ces trois fonctions dans un même repère orthogonal.

d. Combien d'entrées Brahim devra-t-il payer s'il va à la piscine une fois par semaine ? Et s'il y va deux fois par semaine ?

e. Par lecture graphique, détermine le tarif le plus intéressant pour Brahim dans ces deux cas.

f. À partir de combien d'entrées Brahim aura-t-il intérêt à prendre un abonnement au tarif 1 ?

31 Un théâtre propose deux tarifs de places :

- tarif plein : 20 euros ;
- tarif réduit : comprenant un abonnement et permettant d'avoir une réduction de 30 % sur le plein tarif.

a. Un adhérent a dépensé 148 euros (en comptant l'abonnement) pour sept entrées. Calcule le prix de l'abonnement.

b. x désigne un nombre d'entrées. Exprime en fonction de x le prix $p(x)$ payé avec le tarif plein et le prix $p'(x)$ payé avec le tarif réduit.

c. Représente graphiquement p et p'.

d. À partir du graphique, détermine le tarif le plus avantageux pour six entrées puis le nombre minimal d'entrées pour que l'abonnement soit avantageux. (Tu indiqueras par des pointillés les lectures graphiques que tu auras effectuées.)

32 Dans un magasin, une cartouche d'encre pour imprimante coûte 15 €. Sur un site Internet, cette même cartouche coûte 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 €, quel que soit le nombre de cartouches achetées.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	14
Prix à payer, en magasin, en euros		75		
Prix à payer, par Internet, en euros		90		

b. On note $P_A(x)$ le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. Détermine $P_A(x)$.

c. On note $P_B(x)$ le prix à payer pour l'achat de x cartouches par Internet. Détermine $P_B(x)$.

d. Représente les fonctions P_A et P_B.

e. Utilise le graphique précédent pour répondre aux questions suivantes. (Tu indiqueras par des pointillés les lectures graphiques que tu auras effectuées.)

- Détermine le prix le plus avantageux pour l'achat de six cartouches.
- Sonia dispose de 80 € pour acheter des cartouches. Est-il plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou sur Internet ?

f. À partir de quel nombre de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui du magasin ? Explique ta réponse.

33 Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = 2x + 5$ et $g(x) = -3x - 1$.

a. Par le calcul, détermine si les points A(– 3 ; – 1) et B(– 2 ; 5) appartiennent aux représentations graphiques de f et de g.

b. Dans un même repère orthogonal, représente les fonctions f et g et vérifie les réponses de la question **a.** à l'aide des graphiques.

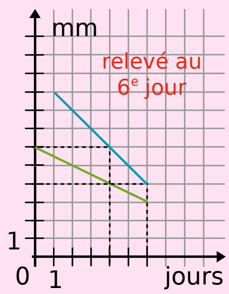
34 Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une fonction affine h passe par les points A(– 3 ; – 1) et B(3 ; – 3). Le point C(1 ; – 2) appartient-il à la droite (AB) ? Justifie ta réponse par des calculs.

35 Démontre que les points R(11 ; – 17) ; S(0 ; 5) et T(– 8 ; 21) sont alignés.

36 Deux éprouvettes contiennent un liquide s'évaporant régulièrement au fil des jours.
Dans le repère ci-dessous, chaque morceau de droite représente la hauteur du liquide (en mm) restant dans l'une de ces éprouvettes en fonction du nombre de jours écoulés.

a. Détermine, pour chaque éprouvette, la hauteur de liquide au début de l'expérience.

b. Combien de jours faudra-t-il pour que tout le liquide se soit évaporé dans chacune des éprouvettes ?



c. Détermine à quel moment le liquide était à la même hauteur dans les deux éprouvettes.

37 Dans un magasin, les prix diminuent de 20 % la première semaine des soldes d'hiver, puis encore de 10 % la deuxième semaine.

a. Un article coûtait 40 € avant les soldes.
Calcule son prix lors de la deuxième semaine des soldes.

b. On appelle x le prix d'un article, en euros, avant les soldes. Exprime, en fonction de x, son prix lors de la deuxième semaine des soldes.

c. Le prix de cet article a-t-il diminué de 30 % ?

d. Un article est affiché à 38,52 € lors de la deuxième semaine des soldes. Calcule son prix avant les soldes.

38 *Livraison*

Une boulangerie livre des croissants à domicile. Le montant facturé comprend le prix des croissants et les frais de livraison qui sont fixes. Quatre croissants livrés coûtent 2,60 € et 10 croissants livrés coûtent 5 €.

a. On considère la fonction f qui, au nombre de croissants achetés, associe le prix facturé en euros. Quelle est sa nature ?

b. Trace la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal (1 cm pour un croissant et 2 cm pour un euro).

c. Détermine, par lecture graphique, le montant des frais de livraison.

39 *Extrait du Brevet*

Au cross du collège, les garçons et les filles courent en même temps sur le même parcours.
Les garçons doivent parcourir 2 km.
Les filles partent à 300 mètres du point de départ des garçons sur le parcours.
Akim fait le parcours des garçons à la vitesse de 15 km·h^{-1}. Cécile fait le parcours des filles à la vitesse constante de 12 km·h^{-1}.
Akim et Cécile partent en même temps.

a. Montrer qu'Akim parcourt 250 mètres par minute. Montrer que Cécile court à la vitesse de 200 m·min^{-1}.

b. À quelle distance du départ des garçons se trouvent Akim et Cécile quand ils ont couru pendant cinq minutes ?

c. Depuis le départ, Akim et Cécile ont couru pendant x minutes.
g est alors la fonction donnant la distance en mètres séparant Akim du départ des garçons et f est la fonction donnant la distance séparant Cécile de ce même départ.
Exprimer $g(x)$ et $f(x)$ en fonction de x.

d. Dans un repère où on choisit un centimètre pour une unité en abscisse et un centimètre pour 100 unités en ordonnée, tracer les représentations graphiques des fonctions g et f.

e. Par lectures graphiques, justifiées en faisant apparaître les tracés indispensables, répondre aux questions suivantes.

- Au bout de combien de temps Akim aura-t-il rattrapé Cécile ?
- À quelle distance du départ des garçons, Akim et Cécile seront-ils à cet instant ?

f. Déterminer par le calcul les réponses aux questions posées en **e.**.

40 Une banque annonce un taux d'intérêt annuel de 4 % pour un placement.

a. On appelle x le montant de la somme placée à 4 % par un client. Exprime, en fonction de x, les intérêts produits par cette somme au bout d'un an.

b. Exprime, en fonction de x, la nouvelle somme dont disposera ce client au bout d'une année supplémentaire.

c. La durée minimale du placement est de six ans. Exprime, en fonction de x, la somme d'argent dont disposera ce client au bout de six années de placement.

d. Quelle somme ce client doit-il placer au départ pour avoir 8 000 € à sa disposition au bout de six ans ? Arrondis le résultat à l'unité.

41 *Les résistances électriques*

Le code couleur des résistances indique une valeur annoncée et une tolérance.
La tolérance d'une résistance est comprise entre 0,05 % et 20 %.
Pour être conforme, la valeur mesurée de la résistance doit valoir ce qui est annoncé plus ou moins cette tolérance.

On étudie des résistances dont la tolérance est de 20 %.

a. La première résistance a une valeur annoncée de 250 Ω.
Donne un encadrement de ses valeurs mesurées conformes.

b. La deuxième résistance qui est conforme a une valeur mesurée de 420 Ω.
Donne un encadrement de ses valeurs annoncées possibles.

c. On appelle x la valeur annoncée de la résistance en ohm (Ω).
Exprime, en fonction de x, la valeur minimale $m(x)$ pour laquelle une résistance est conforme.
Exprime, en fonction de x, la valeur maximale $M(x)$ pour laquelle une résistance est conforme.

d. Représente graphiquement ces deux fonctions dans un même repère. Utilise des couleurs différentes. Fais apparaître la zone du plan délimitée par ces deux droites.

e. Par lecture graphique, donne l'encadrement des valeurs mesurées conformes pour des valeurs annoncées de 250 Ω ; 800 Ω et 1 400 Ω.

f. Par lecture graphique, donne l'encadrement des valeurs annoncées possibles pour des résistances mesurées de 510 Ω ; 720 Ω et 1 650 Ω.

42 *Extrait du Brevet*

Un artisan réalise des boîtes métalliques pour un confiseur.
Chaque boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée ; elle n'a pas de couvercle.
L'unité de longueur est le cm ; l'unité d'aire est le cm² ; l'unité de volume est le cm³.

Partie A

Les côtés de la base mesurent 15 cm et la hauteur de la boîte mesure 6 cm.

a. Préciser la nature des faces latérales de la boîte et leurs dimensions.

b. Montrer que l'aire totale de la boîte est 585 cm².

c. L'artisan découpe le patron de cette boîte dans une plaque de métal de 0,3 mm d'épaisseur. La masse volumique de ce métal est 7 g/cm³, ce qui signifie qu'un centimètre cube de métal a une masse de sept grammes.

Calculer la masse de cette boîte.

Partie B

a. Calculer le volume de cette boîte.

b. Le confiseur décide de recouvrir exactement le fond de la boîte avec un coussin. Ce coussin est un parallélépipède rectangle. Le côté de sa base mesure donc 15 cm et on note x la mesure, en cm, de sa hauteur variable (x est un nombre positif inférieur à 6).

Exprimer, en fonction de x, le volume du coussin.

c. Exprimer, en fonction de x, le volume que peuvent occuper les bonbons dans la boîte.

d. Soit la fonction $f : x \longmapsto 1\,350 - 225x$.

Représenter graphiquement cette fonction pour x positif et inférieur à 6. (On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 unités sur l'axe des ordonnées.)

e. Dans la pratique, x est compris entre 0,5 et 2,5.

Colorier la partie de la représentation graphique correspondant à cette double condition.

f. Calculer $f(0,5)$ et $f(2,5)$.

g. On vient de représenter graphiquement le volume que peuvent occuper les bonbons dans la boîte.

Indiquer le volume minimal que peuvent, dans la pratique, occuper les bonbons.

1 Quizz sur Descartes

1re Partie : Questions

En vous documentant, répondez aux questions suivantes sur Descartes.

- Où et à quelle époque a-t-il vécu ?
- Quels sont les domaines dans lesquels il a travaillé ?
- A-t-il inventé la notion de fonction ?
- Quel lien existe-t-il entre lui et Galilée ?

Comparez les réponses de chaque groupe.

2e Partie : Construction d'un questionnaire

Choisissez un thème parmi les quatre suivants :

- La vie de Descartes ;
- Descartes et la physique ;
- Descartes et la philosophie ;
- Descartes et les mathématiques.

Documentez-vous, en consultant Internet, en allant au CDI de votre collège, etc.
Construisez alors un questionnaire et préparez, sur une autre feuille, les réponses à celui-ci.

3e Partie : Recherche

Chaque groupe choisit ensuite le questionnaire d'un autre groupe pour y répondre.

4e Partie : Mise en commun

En classe entière, étudiez les questions posées sur chaque thème ainsi que les réponses apportées par chacun.

2 Lecture graphique

1re Partie : Tracés

Formez des équipes de deux ou trois élèves. Découpez une feuille A4 à petits carreaux en quatre rectangles identiques, chaque rectangle formera une carte.
Pour chaque équipe :

- prenez une carte, écrivez vos noms en haut et dessinez un repère orthonormé utilisant toute la carte ;
- tracez une droite passant par deux points d'intersection du quadrillage et non parallèle à l'axe des ordonnées.

2e Partie : Expressions algébriques

Quelqu'un mélange toutes les cartes et les distribue à nouveau. En équipe, trouvez l'expression algébrique de la fonction affine correspondant à la droite qui vous a été donnée. Au dos de la carte, écrivez vos noms et votre réponse.

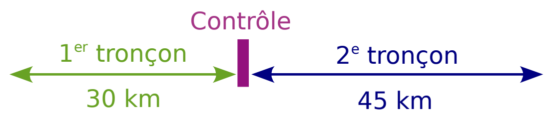
3e Partie : Vérification

Rendez chaque carte à ceux qui ont effectué le tracé. Vérifiez la réponse donnée sur votre carte.

3 Un rallye à l'économie

Formez des équipes de deux ou trois élèves. Vous devez effectuer un rallye à deux tronçons, avec un engin qui roule à vitesse à peu près constante sur chacun des tronçons.

- Le 1er tronçon mesure 30 km puis il y a un contrôle (arrêt obligatoire de 30 min) et le 2e tronçon mesure 45 km.



- Vous disposez seulement de 16 litres de carburant et vous devez effectuer le parcours total en deux heures.
- La consommation C de votre engin, pour 100 km et en fonction de sa vitesse V (avec 30 km/h $< V <$ 120 km/h), est donnée par :

1er tronçon : $C = \dfrac{V^2}{900} - \dfrac{V}{15} + 11$.

2e tronçon :

$$C = 8 \times 10^{-4} \times V^2 - 0{,}048 \times V + 5{,}22.$$

1re Partie : Exemple

a. Quel est le temps mis par Albert, qui a roulé à 45 km/h sur le 1er tronçon et à 60 km/h sur le 2e tronçon ?
Quelle a été sa consommation de carburant ?

b. Faites une représentation graphique de la distance parcourue par Albert en fonction du temps écoulé.
Chaque concurrent gagne dix points par décilitre de carburant économisé et en perd trois par minute s'écartant des deux heures.
Calculez le nombre final de points d'Albert.

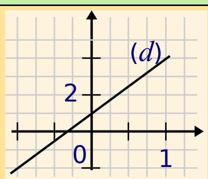
2e Partie : À vous de rouler

a. Choisissez les vitesses sur vos deux tronçons puis calculez votre temps de parcours et le nombre de litres de carburant consommés.

b. Faites une représentation graphique de la distance que vous avez parcourue en fonction du temps écoulé. Calculez votre nombre final de points au rallye.

c. Échangez vos calculs avec une autre équipe (pour vérification) et déterminez l'équipe gagnante du rallye.

Se tester avec le QCM !

<table>
<tr><th></th><th></th><th>R1</th><th>R2</th><th>R3</th><th>R4</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><td>x</td><td>6</td><td>9</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>− 4</td><td>− 6</td></tr></table>Le coefficient de la fonction linéaire f est...</td><td>$\frac{-3}{2}$</td><td>$\frac{-2}{3}$</td><td>− 0,6</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Une réduction de 30 % peut se traduire par la fonction...</td><td>$x \longmapsto x - 30$</td><td>$x \longmapsto x - 0{,}3$</td><td>$x \longmapsto 0{,}7x$</td><td>$x \longmapsto \frac{30}{100}x$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Parmi les fonctions suivantes, les fonctions linéaires sont...</td><td>$x \longmapsto 5x^2$</td><td>$x \longmapsto 4x + 3$</td><td>$x \longmapsto 6x - 4x$</td><td>$x \longmapsto \frac{7}{9}x$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>La fonction linéaire dont la représentation graphique passe par le point A(1 ; 4) a pour coefficient...</td><td>0</td><td>0,25</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>f est une fonction linéaire donc...</td><td>$f(8) = f(5) + f(3)$</td><td>$f(8) = 5 + f(3)$</td><td>$f(6) = f(2) \times f(3)$</td><td>$f(6) = 2 \times f(3)$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>− 5 est l'image de − 4 par la fonction affine...</td><td>$x \longmapsto -5x - 4$</td><td>$x \longmapsto 3x + 7$</td><td>$x \longmapsto \frac{5}{4}x$</td><td>$x \longmapsto 2x + 3$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Le nombre qui a pour image 13 par la fonction $x \longmapsto -2x + 3$ est....</td><td>− 23</td><td>5</td><td>− 5</td><td>− 29</td></tr>
<tr><td>8</td><td>La droite (d) représente la fonction...</td><td>$x \longmapsto 3x + 1$</td><td>$x \longmapsto 3x + 2$</td><td>$x \longmapsto 4x$</td><td>$x \longmapsto x + 3$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>f est une fonction telle que $f(4) = 5$ et $f(1) = 3$ avec $f(x) = ax + b$. Donc...</td><td>$\frac{f(4)-5}{f(1)-3} = a$</td><td>$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = a$</td><td>$\frac{f(1)-f(4)}{1-4} = a$</td><td>$a = \frac{2}{3}$</td></tr>
</table>

Pour aller plus loin

Coordonnées entières

Dans un repère (O, I, J), on joint l'origine O au point A de coordonnées (72 ; 48).

On veut savoir combien de points dont les deux coordonnées sont entières appartiennent au segment [OA].

a. Quel est le coefficient directeur de la droite (OA) ? Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

b. On appelle (x ; y) les coordonnées d'un point du segment [OA]. Exprime y en fonction de x.

c. Pour que l'ordonnée y de ce point soit entière, que doit donc vérifier x ?

d. Conclus en donnant les coordonnées de tous les points, à coordonnées entières, appartenant au segment [OA].