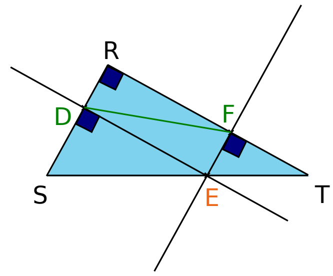
Activité 1 : Des variations (1)



On considère le triangle RST rectangle en R avec RS = 5 cm et RT = 9 cm. E est un point du segment [ST].
D est le point d'intersection de [RS] et de la perpendiculaire à (RS) passant par E.
F est le point d'intersection de [RT] et de la perpendiculaire à (RT) passant par E.
On s'intéresse à la longueur du segment [DF].

1. À partir d'une figure

a. Trace une figure. Obtiens-tu la même figure que celles de tes camarades ?
Décris les similitudes et les différences des figures obtenues.

b. De quoi dépend la longueur du segment [DF] ?

2. Avec TracenPoche

a. Construis la figure ci-dessus et fais afficher la longueur DF.
Déplace le point E. Que remarques-tu ?

b. Quelles sont les valeurs possibles de SE ?

c. En faisant afficher également la longueur SE, recopie et complète le tableau suivant.

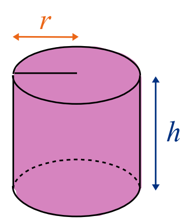
SE en cm	0	0,45	1,3	1,6	1,95	2,45	2,95	3,87		
DF en cm									4,72	9

d. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

e. À chaque valeur de SE, combien de valeurs de DF peut-on associer ?
À chaque valeur de DF, combien de valeurs de SE peut-on associer ?

f. Émets une conjecture sur la position de E telle que la longueur DF soit minimale.
Trouve une construction géométrique de ce point E que tu justifieras.

Activité 2 : Des variations (2)



On considère un cylindre de hauteur h et dont la base a pour rayon r (en dm).

1. Établis la formule donnant le volume de ce cylindre en dm^3.
De quelle(s) grandeur(s) dépend ce volume ?

2. On suppose que $r = 5$ dm.

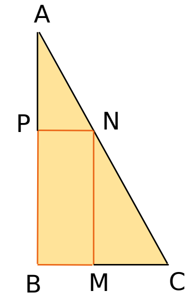
En utilisant un tableur et en présentant sous forme d'un tableau, calcule le volume de ce cylindre pour les valeurs de h allant de 0 à 10 dm avec un pas de 0,5.
Insère ensuite un graphique de type « ligne » représentant les valeurs du tableau.

3. On suppose maintenant que $h = 18$ dm.

En utilisant un tableur et en présentant sous forme d'un tableau, calcule le volume de ce cylindre pour les valeurs de r allant de 0 à 5 dm avec un pas de 0,2.
Insère ensuite un graphique de type « ligne » représentant les valeurs du tableau.

4. Quelles sont les différences et les similitudes des situations des deux questions précédentes ?

Activité 3 : Des variations (3)



Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre : AB = 10 cm et BC = 5 cm.
M est un point du segment [BC]. P et N sont les points

1. À partir d'une figure

a. Trace une figure en choisissant une position du point M sur [BC].
En mesurant les longueurs utiles, évalue le

b. De quoi dépendent l'aire et le périmètre de BMNP ?

2. « En fonction de... »

a. On pose BM = x. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

b. Exprime MC en fonction de x puis, en utilisant le théorème de Thalès, MN en fonction de x.

c. Déduis-en le périmètre et l'aire de BMNP en fonction de x.

3. Le périmètre

a. Recopie et complète le tableau suivant en utilisant un tableur.

x en cm	0,5	0,8	1	1,3	1,9	2,7	3,5	4	4,2	4,8
Périmètre de BMNP en cm										

b. Représente les valeurs de ce tableau sur un graphique ; les valeurs de x seront en abscisse et les valeurs correspondantes du périmètre en ordonnée.

c. Que remarques-tu ? Est-ce une situation de proportionnalité ?
Dans la feuille de calcul précédente, insère à partir de ton tableau un graphique de type « ligne ».

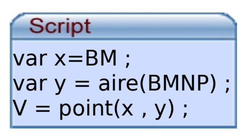
4. L'aire

a. Construis un tableau donnant les valeurs de l'aire (en cm^2) pour les valeurs de x (en cm) allant de 0,5 à 4,5 avec un pas de 0,5.

b. Sur une feuille de papier millimétré, représente les valeurs de ce tableau sur un nouveau graphique sur lequel tu mettras cette fois-ci les valeurs de l'aire en ordonnée.
Tu prendras sur les axes des abscisses et des ordonnées 2 cm pour 1 unité, en plaçant l'origine du repère en bas à gauche de ta feuille.

c. Peux-tu prévoir, à l'aide du graphique, l'aire de BMNP lorsque x = 1,8 ?
Combien semble-t-il y avoir de positions possibles de M telle que l'aire de BMNP soit égale à 9 cm^2 ? Même question avec 15 cm^2.

d. Construis avec TracenPoche la figure initiale et fais apparaître le repère.
Complète le script de la figure en créant deux « variables » puis un point V comme le montre l'image ci-contre.



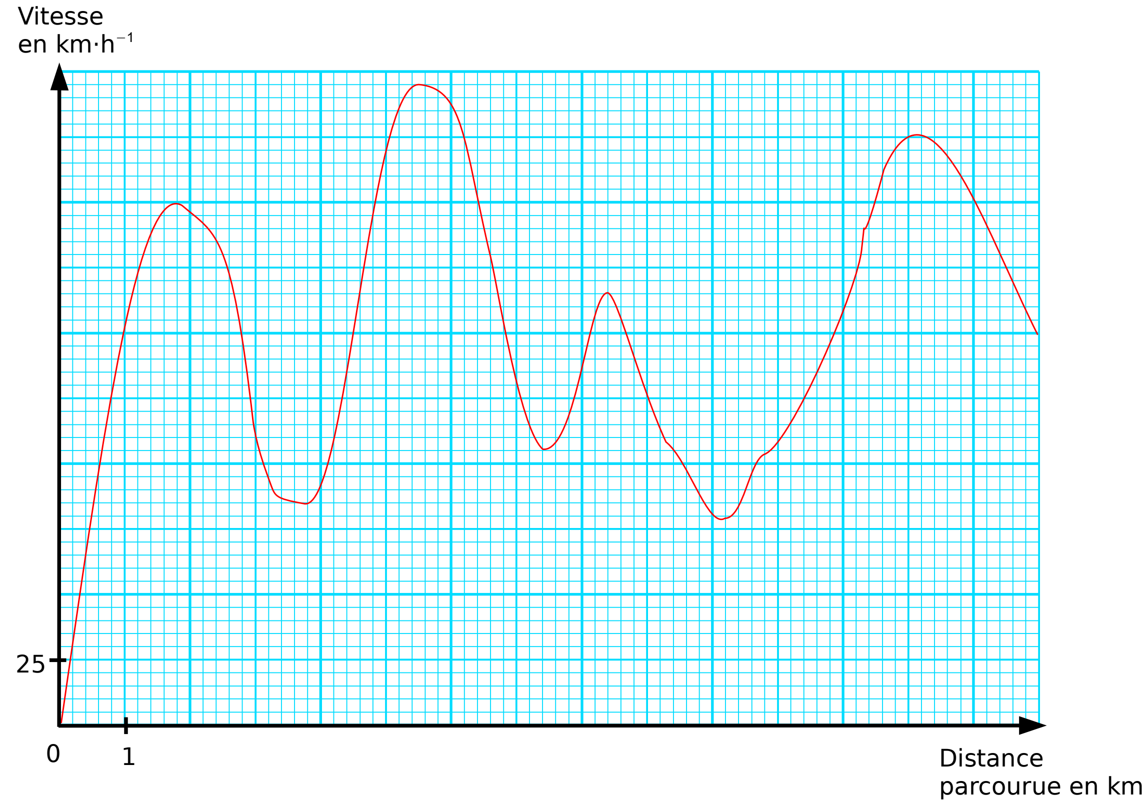
En demandant la trace du point V, déplace le point M sur le segment [BC]. Décris ce que tu obtiens.

5. Peux-tu calculer les deux expressions littérales obtenues dans cette activité pour x = – 5 ?

Activité 4 : Avec un graphique

Sur un circuit de 13,2 km, un pilote réalise des essais pour une nouvelle voiture de course. Des capteurs placés sur le circuit mesurent la vitesse au moment du passage de la voiture, ces vitesses sont notées dans le tableau ci-dessous.
D'autre part, un enregistreur placé à bord de la voiture donne la vitesse en fonction de la distance parcourue sous la forme du graphique ci-dessous.

Capteur n°...	1	2	3	4	5	6	7	8
Distance parcourue depuis la ligne de départ en km	0,8	2	2,8	4,6	7,2	9,4	...	13
Vitesse mesurée en km·h^{-1}	125	196	144	...	113	...	200	...



1. Détermine, si possible, les données manquantes dans le tableau.

2. Place sur le graphique les points qui représentent les données du tableau. Que peux-tu dire de ces points ?

3. Quelle est la vitesse mesurée après 6 km parcourus ? Peut-il y avoir plusieurs réponses ?

4. La vitesse est-elle fonction de la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

5. Quelle est la vitesse maximale atteinte ? La vitesse minimale ?

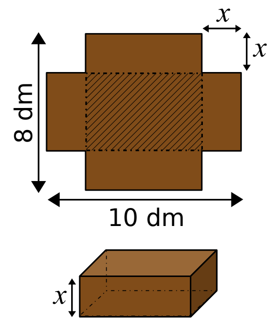
6. À quelle vitesse la voiture est-elle repassée sur la ligne de départ au bout d'un tour ?

7. En quels endroits du circuit la voiture roulait-elle à 160 km·h^{-1} ?

8. La distance parcourue est-elle une fonction de la vitesse de la voiture ?

9. Représente sur un graphique identique et à partir du premier kilomètre, le relevé d'une voiture qui roulerait constamment à 100 km·h^{-1} après avoir parcouru ce premier kilomètre.

Activité 5 : Optimiser



Avec une plaque de carton rectangulaire de 8 dm par 10 dm, en découpant quatre carrés identiques, on obtient le patron d'une boîte (sans couvercle !).

On veut trouver la dimension des carrés à découper pour obtenir une boîte dont le volume sera maximum.

On appelle x la longueur du côté des carrés en décimètre.

1. Quelle est la plus grande valeur possible de x ?
Le volume de la boîte est-il maximum pour cette valeur ?

2. Exprime en fonction de x la surface du « fond » de la boîte (partie hachurée) puis déduis-en l'expression du volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.

3. Avec un tableur, construis un tableau de valeurs du volume V pour une dizaine de valeurs de x de ton choix.
Décris l'évolution de ce volume suivant les valeurs de x.

4. Dans la même feuille de calcul, insère un graphique de type « ligne » représentant les valeurs de ton tableau (les valeurs du volume en ordonnée).

Ce graphique confirme-t-il ta description précédente ? Le problème posé semble-t-il avoir une solution ?

5. En affinant les valeurs choisies dans ton tableau et en utilisant de nouveaux graphiques, donne une valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur de x cherchée.

Activité 6 : Les dimensions du rectangle

On cherche les dimensions L et l d'un rectangle dont le périmètre est 14 m et l'aire 11 m^2.

1. Fais quelques essais pour trouver les valeurs de L et l. Que penses-tu du problème posé ?

2. Équation(s)

a. Écris les deux relations qui lient L et l et déduis-en que L et l sont solutions de l'équation $x^2 - 7x + 11 = 0$.

b. Entre quels nombres se trouvent L et l nécessairement ?

3. Soit $E(x) = x^2 - 7x + 11$

a. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(x)$										

b. Représente graphiquement ce tableau de valeurs à l'aide d'un tableur.

c. Utilise ce graphique pour donner deux valeurs approchées de x telles que $E(x) = 0$.
En affinant les valeurs du tableau, donnes-en des valeurs approchées au centième.

4. Quelles sont les dimensions approchées du rectangle ?

Méthode 1 : Déterminer l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction définie par un tableau

Exemple : On donne un **tableau de valeurs** de la fonction h. Quelle est l'**image** de 8 par la fonction h ? Trouve un **antécédent** de – 125.

x	– 5,25	– 3	– 1,75	0	2	5,5	8
$h(x)$	– 358	– 125	3	7	12,5	3	20

La deuxième ligne du tableau donne l'**image** de chaque nombre de la première ligne par la fonction h.

Pour trouver l'**image** de 8 : on cherche 8 sur la première ligne du tableau et on lit son **image** sur la deuxième ligne ; l'**image** de 8 est 20 et on écrit $h(8) = 20$.
On peut également noter $h : 8 \longmapsto 20$.

Pour trouver le (ou les) **antécédent(s)** de – 125 : on cherche – 125 sur la deuxième ligne du tableau et on lit le (ou les) **antécédent(s)** sur la première ligne ; un **antécédent** de – 125 est – 3 et on écrit $h(-3) = -125$ (ou $h : -3 \longmapsto -125$).

Exercice « À toi de jouer »

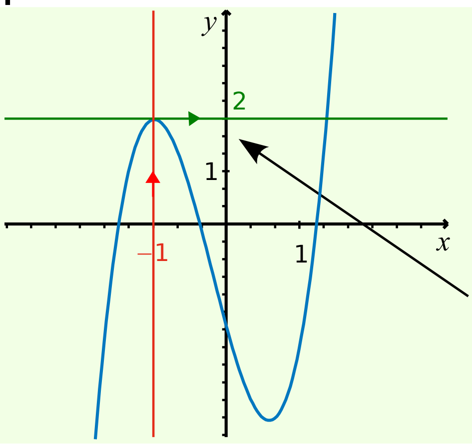
1 La fonction p est définie par le tableau suivant.

x	– 10	– 3	– 1	0	1,5	2,5	5	6	8
$p(x)$	– 5	– 1	0	1,5	4,25	8	0	– 3	– 6

Détermine l'image de – 10 puis l'image de 2,5.
Détermine le (ou les) antécédent(s) de – 3 puis de 0.

Méthode 2 : Déterminer l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction définie par une courbe

Exemple 1 : On donne la courbe d'une fonction f. Détermine l'image de – 1.



On trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées (– 1 ; 0).

On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et qui passe par le point d'intersection de la courbe et de la droite précédente.

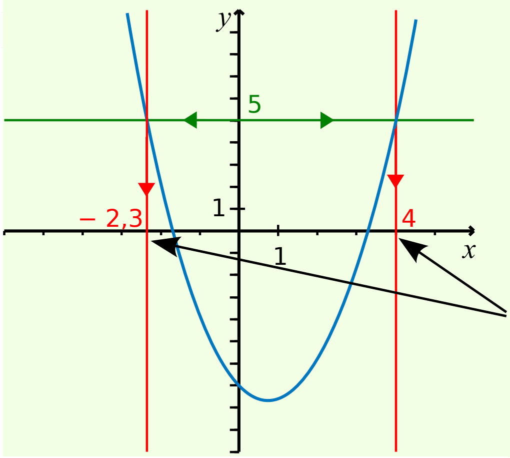
Elle coupe l'axe des ordonnées approximativement au point de coordonnées (0 ; 2).

On en déduit que l'image de – 1 par la fonction f est environ 2 donc $f(-1) \approx 2$.

Exercice « À toi de jouer »

2 Avec la courbe de la fonction précédente, quelle est l'image de $\frac{1}{3}$? Obtiens-tu une valeur exacte ? Quelle est l'image de 0 ? À quoi cela correspond-il graphiquement ?

Exemple 2 : On donne la courbe d'une fonction g. Détermine le (ou les) antécédent(s) de 5.



On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées (0 ; 5).

On trace la (ou les) droite(s) parallèle(s) à l'axe des ordonnées passant par le(s) point(s) d'intersection de la courbe et de la droite précédente.

Ces parallèles (deux, ici) coupent l'axe des abscisses approximativement aux points de coordonnées (4 ; 0) et (– 2,3 ; 0).

Donc 5 a deux antécédents par la fonction g qui sont, environ, 4 et – 2,3.

On écrit $g(4) \approx 5$ et $g(-2{,}3) \approx 5$.

Exercice « À toi de jouer »

3 À l'aide de la courbe de la fonction g, détermine le (ou les) antécédent(s) de – 4. As-tu obtenu des valeurs exactes ? Même question pour – 9.

Méthode 3 : Déterminer l'image d'un nombre par une fonction définie par une formule

Exemple : Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 7x + 12$. Quelle est l'image de – 5 ?

$2 \longmapsto 10$ par la fonction f signifie qu'au nombre 2, la fonction associe le nombre 10. On dit que 10 est l'**image** de 2 par la fonction f et on note $f(2) = 10$.

$x \longmapsto 3x^2 - 7x + 12$ signifie qu'à tout nombre, ici noté x, la fonction f associe un unique nombre qui se calcule avec cette formule : $3x^2 - 7x + 12$. On dit que l'**image** de x par la fonction f est $3x^2 - 7x + 12$ et on note aussi $f(x) = 3x^2 - 7x + 12$.

<u>Calcul de l'image de – 5 par f avec $f(x) = 3x^2 - 7x + 12$</u>.

$f(-5) = 3 \times (-5)^2 - 7 \times (-5) + 12$ ⟶ On remplace x par – 5.

$f(-5) = 75 + 35 + 12$ ⟶ On calcule.

$f(-5) = 122$

Donc l'image de – 5 par la fonction f est 122. On écrit aussi $f(-5) = 122$.

Exercices « À toi de jouer »

4 Soit une fonction l telle que $l(-2) = 12$ et $l(7) = 15$.

a. Peux-tu trouver l'image de – 5 ?

b. Traduis cette phrase : « L'image de – 8 par la fonction l est 15. » par une égalité.

5 La fonction h est définie par la formule $h(x) = 3x(5x^2 - 2)$.
Calcule l'image de – 2,5 ; de 20 puis de 0.

Exercices d'entraînement

Vocabulaire, notations

1 Traduis chaque égalité par une phrase contenant le mot « image ».

a. $f(3) = 4$

b. $g(0) = -2$

c. $h(x) = 3x^2 - 4$

d. $p(x) = -x$

2 Traduis chaque phrase par une égalité.

a. Par la fonction g, – 5,3 est l'image de 6.

b. 2,5 a pour image 4,2 par la fonction f.

c. L'image de 3 par la fonction h est 7.

d. Par la fonction p, – 4 a pour image – 6,5.

e. L'image de 5 par la fonction m est nulle.

3 Traduis chaque phrase par une égalité puis par une correspondance de la forme $x \longmapsto \ldots$.

a. x a pour image $4x - 5$ par la fonction f.

b. L'image de x par la fonction g est $x(x + 1)$.

c. Par la fonction h, $-3x$ est l'image de x.

d. Par la fonction r, x a pour image $2x - 5x^2$.

e. La fonction k associe, à tout nombre x, le nombre $3(x - 2)$.

4 Traduis chaque notation par une phrase contenant le mot « image » et par une égalité.

a. $f : 7 \longmapsto -17$

b. $g : -5 \longmapsto 3{,}2$

c. $h : x \longmapsto -4x^2$

d. $v : x \longmapsto -3$

Image

5 Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction f.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	2	1	– 3	– 4	5	3	4	– 4

a. Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?

b. Quel nombre a pour image – 3 par la fonction f ?

c. Quels sont les nombres qui ont la même image par la fonction f ?

6 Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction g.

x	– 0,5	– 0,1	0	0,7	0,9	1,1	1,3
$g(x)$	5	2	1	– 0,1	– 4	5	3,4

Recopie et complète les égalités suivantes.

a. $g(-0{,}1) = \ldots$

b. $g(\ldots) = 1$

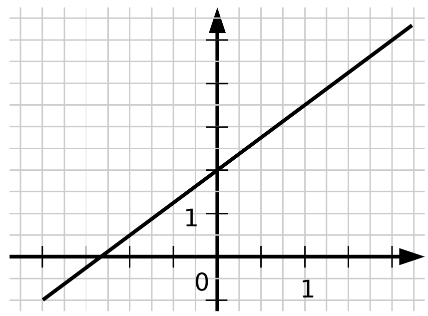
c. $g(0{,}9) = \ldots$

d. $g(\ldots) = -4$

e. $g(0{,}7) = \ldots$

f. $g(\ldots) = 5$

7 Ce graphique représente une fonction f.

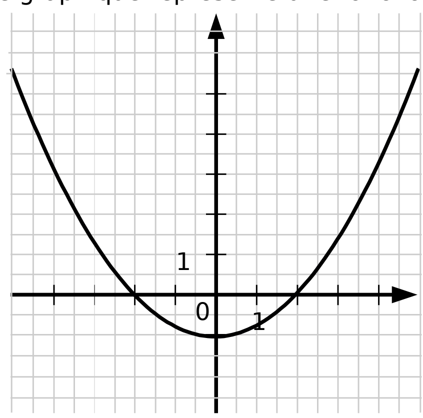


a. Quelle est l'image de 1 par f ?

b. Donne des valeurs pour :

- $f(0)$
- l'image de 2 par f
- l'image de – 2 par f
- $f(-1)$

8 Ce graphique représente une fonction h.



a. Quelle est l'image de 0 par la fonction h ?

b. Quels nombres ont pour image 0 par la fonction h ?

c. Donne une valeur approchée de :

- l'image de 4 par la fonction h.
- l'image de – 3 par la fonction h.

9 On considère la fonction h définie par :

$h : x \longmapsto 5x^2 - 4x + 3$.

Calcule l'image de chacun des nombres suivants.

a. 2 **b.** -3 **c.** $\frac{2}{3}$ **d.** 0 **e.** 1,4

10 On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

Calcule, lorsque cela est possible, l'image de chacun des nombres suivants.
Lorsque ce n'est pas possible, explique pourquoi.

a. 0 **c.** -9 **e.** 0,25

b. 4 **d.** 3 **f.** $\frac{25}{36}$

11 Traduis chacune des phrases suivantes par une correspondance de la forme $x \longmapsto \ldots$.

a. Pour calculer l'image d'un nombre x, on le multiplie par 2 puis on ajoute 3 au résultat.

b. Pour calculer l'image d'un nombre x, on calcule son carré puis on soustrait 4 au résultat.

c. Pour calculer l'image d'un nombre x non nul, on multiplie l'inverse de ce nombre par -9.

d. Pour calculer l'image d'un nombre x non nul, on calcule la somme de ce nombre et de 3 puis on divise le résultat par le nombre x.

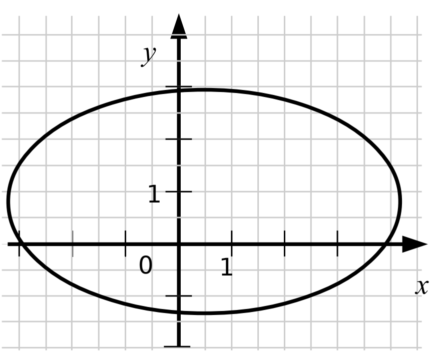
12 *Fonction ou pas ?*

Dans chaque cas, explique pourquoi on ne peut pas trouver une fonction qui, à x, associe y.

a.

x	-2	1	0	2	-1	1
y	-4	3	-3	5	2	4

b.



Antécédent

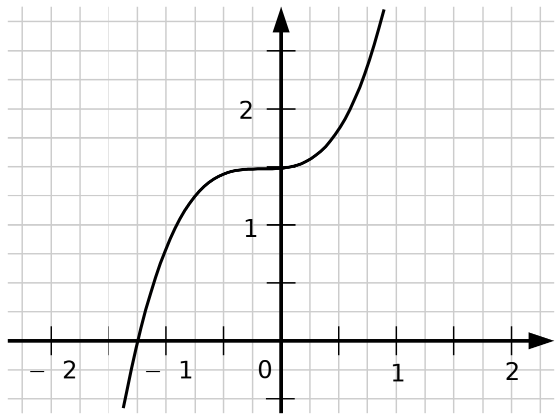
13 Le tableau suivant est un tableau de valeurs correspondant à une fonction f.

x	-12	$-1,5$	0	5	2
$f(x)$	4	-2	-1	3,5	-2

Dans chaque cas, indique, d'après le tableau, le (ou les) antécédent(s) du nombre donné par la fonction f.

a. 3,5 **b.** -2 **c.** 2

14 Ce graphique représente une fonction h.



Recopie et complète le tableau suivant.

x	$-1,25$		-1	
$h(x)$		1,5		1,25

15 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x}$.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

x	4	3		
$f(x)$			$-0,1$	8

b. Quel nombre n'a pas d'image par f ?

16 On considère la fonction g définie par $g(x) = (x - 3)(x + 1)$.

a. Quelle est l'image de 2 par g ?

b. Quelle est l'image de -5 par g ?

c. Quels sont les antécédents de 0 par g ?

d. Donne un antécédent de -3 par g.

Graphique

17 La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

a. Avec un tableur et en présentant sous forme d'un tableau, calcule les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x allant de -4 à 4 avec un pas de 1.

b. Insère ensuite un graphique de type « ligne » représentant ce tableau.

18 Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction f.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	-2	$-1,5$	2	3

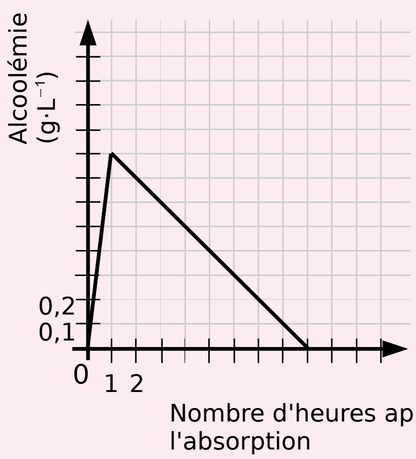
a. Construis un repère et place, dans ce repère, les points de la représentation graphique de la fonction f déterminés grâce au tableau.

b. Avec un tableur, représente graphiquement le tableau de valeurs de la fonction f.

Problèmes

19 *Sécurité routière (source : Eduscol)*

On mesure le taux d'alcoolémie chez un homme après l'absorption d'une boisson alcoolisée à jeun.



a. Quel est le taux d'alcoolémie au bout de trois heures ?

b. Quand le taux d'alcoolémie est-il de 0,5 g·L^{-1} ?

c. Quand le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

d. Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il nul ?

20 On considère le programme de calcul :

- Choisis un nombre ;
- Ajoute 6 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par le nombre de départ ;
- Ajoute 9 au résultat.

a. Quel nombre obtient-on si l'on choisit 2 comme nombre de départ ? Donne le résultat sous la forme du carré d'un nombre.

b. Même question avec 5.

c. On note x le nombre choisi au départ et on appelle f la fonction qui, au nombre x, associe le résultat du programme précédent.
Quelles sont les images de 2 et de 5 par la fonction f ?

d. Exprime, en fonction de x, l'image de x par la fonction f. Donne le résultat sous la forme du carré d'un nombre.

e. Recopie et complète le tableau suivant.

x	2	10	0	-15	-8	2,5
$f(x)$						

f. Donne un antécédent de 1 par f.

g. Avec un tableur, représente graphiquement le tableau de valeurs de la fonction f.

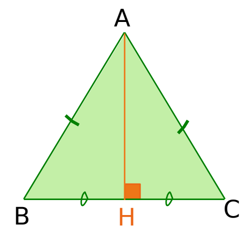
h. En utilisant le graphique, quels nombres peut-on choisir au départ pour obtenir 81 comme résultat ?

i. Retrouve la réponse précédente par le calcul.

21 *Hauteur d'un triangle équilatéral*

a. Calcule la hauteur puis l'aire d'un triangle équilatéral de côté 5 cm.

b. On note x le côté d'un triangle équilatéral (en cm). Exprime sa hauteur en fonction de x.



c. On appelle f la fonction qui à x associe l'aire du triangle équilatéral de côté x.

- Détermine une expression de f.
- Calcule $f(5)$; $f(3)$ et $f(\sqrt{3})$.

22 On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a. Calcule l'image de -3.

b. Peux-tu calculer l'image de 0 par la fonction f ? Pourquoi ?

c. Dans cette question, on considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x-4}$. Détermine le nombre qui n'a pas d'image par la fonction g.

23 On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$.

a. Tous les nombres ont-ils une image par la fonction h ? Justifie ta réponse.

b. Détermine le (ou les) antécédent(s) de 25 par la fonction h. Peux-tu déterminer un antécédent de -3 ? Explique pourquoi.

c. Trouve tous les nombres qui n'ont pas d'antécédent.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$.

a. Calcule, si possible, l'image de 6 ; de 27 ; de 0 et de -5. Que remarques-tu ?

b. Trouve d'autres nombres qui n'ont pas d'image par la fonction f.
Comment caractérises-tu tous ces nombres ?

c. Construis un tableau de valeurs en prenant garde de bien choisir les valeurs de x.

d. En t'aidant des questions **a.** et **b.**, positionne l'origine du repère sur ta feuille. Prends 1 cm pour 1 unité en abscisse et 2 cm pour 1 unité en ordonnée.

e. Place dans le repère précédent les points obtenus dans le tableau de la question **c.**.

25 *Recherche d'antécédent*

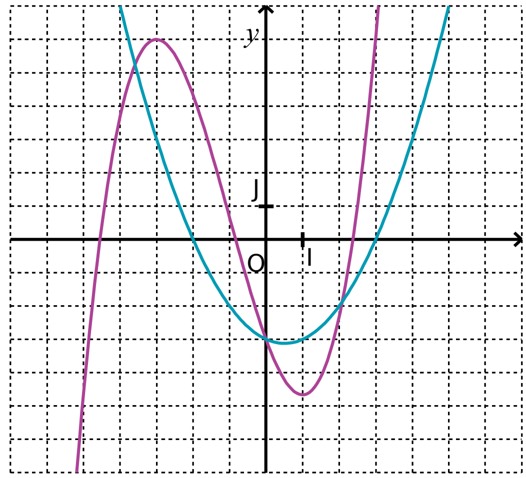
On veut déterminer le (ou les) antécédent(s) de 2 par la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.

a. Montre que cela revient à résoudre l'équation $x(5x-3) = 0$.

b. Résous cette équation puis vérifie la valeur des images des solutions.

26 Détermine le (ou les) antécédent(s) de -5 par la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 21$.

27 *Avec un graphique*



Dans le repère (O, I, J) ci-dessus sont représentées deux fonctions f (en violet) et g (en bleu).

a. Recopie et complète le tableau ci-dessous en lisant le graphique. Donne toutes les réponses possibles.

x	-3	-1	0			
$f(x)$				-5	-3	6

b. Recopie et complète le tableau ci-dessous en lisant le graphique. Donne toutes les réponses possibles.

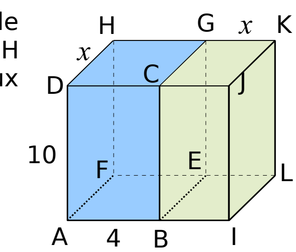
x	-2	0	3			
$g(x)$				-6	-2	3

c. Quelle est l'image maximale par la fonction f pour un nombre compris entre -7 et 0 ?

d. Détermine une valeur approchée du nombre, compris entre -7 et 7, qui a la plus petite image par la fonction g.

e. Détermine graphiquement les valeurs de x qui ont la même image par les fonctions f et g.

28 L'unité est le centimètre. ABCDFEGH et BIJCELKG sont deux pavés droits.



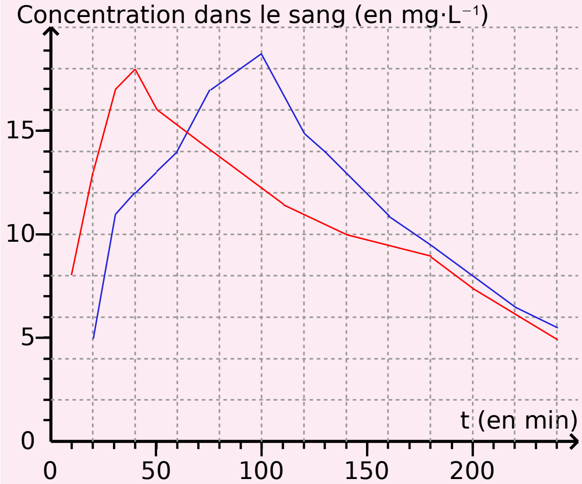
a. Exprime les volumes $V_1(x)$ du pavé bleu et $V_2(x)$ du pavé vert en fonction de x.

b. Dans un tableur, construis un tableau de valeurs et les courbes représentatives de V_1 et V_2 en fonction de x.

c. Quel(s) nombre(s) a (ont) la même image par V_1 et V_2 ?

29 *Aïe, aïe !*

Les deux courbes ci-dessous donnent la concentration dans le sang (en mg·L⁻¹) en fonction du temps (en min) pour deux formes différentes d'un anti-douleur (dont l'action est proportionnelle à son taux de concentration dans le sang) : le comprimé « classique » (en bleu) et le comprimé effervescent (en rouge).



a. Pour chaque forme de comprimé, donne la concentration dans le sang au bout de 30 min ; d'1 h 30 min et de 3 h.

b. Au bout de combien de temps chaque concentration est-elle maximale ? Quelle forme de comprimé doit-on prendre si l'on souhaite calmer des douleurs le plus rapidement possible ?

c. À quels instants a-t-on une concentration de 13 mg·L⁻¹ pour chacun des produits ? À quel instant les deux concentrations sont-elles égales ?

d. Récris chacune des réponses précédentes en utilisant le langage des fonctions.

30 *Aire maximale*

On étudie les rectangles qui ont un périmètre de 30 cm (construis-en deux exemples).

a. Soit l la largeur du rectangle.
Quelles sont les valeurs possibles de l ? Exprime la longueur du rectangle puis l'aire du rectangle $A(l)$ en fonction de l.

b. Dans un tableur, programme une feuille de calcul permettant de trouver l'aire $A(l)$ du rectangle en fonction de l.

c. Trace, dans un repère, une représentation graphique de la fonction A.

d. Détermine graphiquement les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire. Trace-le.

31 *Distance de freinage (source : Eduscol)*

La distance d'arrêt D_A est la distance qu'il faut à un véhicule pour s'arrêter. Elle dépend de la vitesse et se décompose en la somme de la distance parcourue pendant le temps de réaction D_{TR} et de la distance de freinage D_F.

$$D_A = D_{TR} + D_F$$

a. Donne des paramètres dont dépend D_{TR}.

b. Donne des paramètres dont D_F est fonction.

c. Pour un conducteur en bonne santé, le temps de réaction est évalué à 2 s. Calcule la distance D_{TR} (en m) pour un véhicule roulant à 50 km·h⁻¹ puis à 130 km·h⁻¹.

d. Pour un conducteur en bonne santé, exprime la distance D_{TR} (en m) en fonction de la vitesse v en km·h⁻¹.

e. Dans un tableur, recopie le tableau suivant qui donne D_F (en m) en fonction de la vitesse v (en km·h⁻¹) sur route sèche. (Tu mettras les vitesses dans la ligne 1 et D_F dans la ligne 2.)

v	10	20	30	40	50	60	70
$D_F(v)$	1,8	3,6	6,9	10,3	16,1	23,2	31,4
v	80	90	100	110	120	130	140
$D_F(v)$	41	52	64,6	78,1	93	108,5	123

f. Dans la ligne 3, programme le calcul de $D_{TR}(v)$.

g. Complète la ligne 4 en programmant le calcul de la distance d'arrêt sur route sèche.

h. Sur route mouillée, la distance de freinage augmente de 40 %. Calcule la distance de freinage sur route mouillée, $D_{FM}(50)$, d'un véhicule roulant à 50 km·h⁻¹.
Exprime $D_{FM}(v)$ en fonction de la vitesse puis complète le tableau en calculant $D_{FM}(v)$.

i. Complète le tableau en calculant la distance d'arrêt d'un véhicule sur route mouillée $D_{AM}(v)$.

j. Sur une feuille de papier millimétré, représente la distance d'arrêt d'un véhicule sur route sèche et sur route mouillée en fonction de la vitesse. (Tu prendras en abscisse 1 cm pour 10 km·h⁻¹ et en ordonnée 1 cm pour 20 m.)

k. Détermine, sur le graphique, l'augmentation de la distance d'arrêt entre une route sèche et une route mouillée pour les vitesses de 50 km·h⁻¹ ; 90 km·h⁻¹ et 130 km·h⁻¹.

l. Où se positionnerait la courbe de la distance d'arrêt sur une route verglacée par rapport aux deux courbes précédentes ?

1 Montage et démontage de fonctions

1^re^ Partie : Montage

Pour obtenir une fonction f, Véronique fait un « montage de fonctions » grâce à la suite d'instructions :
« Prendre le nombre x, l'élever au carré, multiplier le résultat par 3, soustraire 5 et diviser le résultat par 4. »
Elle a noté le schéma suivant :

$$x \xmapsto{\uparrow 2} x^2 \xmapsto{\times 3} 3x^2 \xmapsto{-5} 3x^2 - 5 \xmapsto{\div 4} \frac{3x^2-5}{4}$$

Elle obtient finalement la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2-5}{4}$.

De même, Samir a obtenu la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x+6}}$ par le montage :

$$x \xmapsto{(-)} -x \xmapsto{+6} -x+6 \xmapsto{\boxed{}} \sqrt{-x+6} \xmapsto{1/\ldots} \frac{1}{\sqrt{-x+6}}$$

Ce qui correspond aux instructions :

« Prendre le nombre x, prendre son opposé, ajouter 6, prendre la racine carrée, prendre l'inverse. ».

a. Écris l'expression de la fonction résultant de chacun des deux montages suivants :

$$x \xmapsto{\uparrow 2} \ldots\ldots\ldots \xmapsto{\times(-3)} \ldots\ldots\ldots \xmapsto{+4} \ldots\ldots\ldots$$

« Prendre le nombre x, l'élever au carré, prendre l'opposé du résultat, diviser par 4, prendre l'inverse. ».

b. Quel est le montage qui correspond aux fonctions définies ci-dessous ?

$$f(x) = \frac{1}{3\left(\frac{1}{x} - 5\right)} \text{ et } g(x) = \sqrt{8 - x^2}.$$

2^e^ Partie : Démontage

Regroupez-vous par deux.

Chaque élève écrit sur une feuille quatre montages de fonctions : deux avec des instructions en toutes lettres et deux grâce à un schéma.

Dans chaque groupe, échangez alors vos feuilles et devinez quelles fonctions ont été montées par votre camarade. Enfin, échangez à nouveau pour vérifier entre vous.

3^e^ Partie : Devinette de fonctions

En salle informatique, regroupez-vous par quatre autour d'un ordinateur.

Deux élèves jouent le rôle des « **inventeurs de fonction** » : écrivez sur une feuille l'expression d'une fonction simple qui est obtenue par un montage en deux étapes et programmez ensuite un tableur pour pouvoir donner la valeur d'images de nombres par cette fonction.

Les deux autres élèves sont les « **chercheurs de fonction** » : vous devez deviner quelle est cette fonction. Pour cela, vous pouvez soit demander quelle est l'image d'un nombre de votre choix, soit proposer une fonction.
Une fois la fonction devinée, échangez les rôles.

Le groupe qui gagne est celui qui a « deviné » la fonction en posant le moins de questions.

2 Résolution graphique d'équations

1^re^ Partie : Omar Khayyam

Recherchez des renseignements à propos d'Omar Khayyam (quand et où a-t-il vécu, qu'a-t-il fait, ...).
Préparez un document pour présenter le résultat de vos recherches à vos camarades.
Omar Khayyam proposa des résolutions géométriques des équations du second degré. Dans la suite, nous allons aussi résoudre certaines équations de manière graphique.

2^e^ Partie : Un exemple

On veut résoudre graphiquement l'équation $x^2 - 1{,}5x - 7 = 0$. Justifiez que résoudre cette équation revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1{,}5\,x + 7$.

a. Dans un même repère orthogonal, tracez les représentations graphiques de ces deux fonctions.

b. Lisez les abscisses des points d'intersection et justifiez que ce sont des solutions (éventuellement approchées) de l'équation initiale.

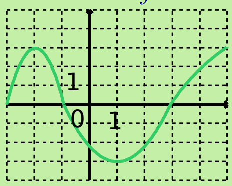
3^e^ Partie : Inventons une équation

c. Par groupe de quatre élèves, choisissez deux nombres entiers entre -10 et 10 et inventez une équation ayant ces deux nombres comme solutions (idée : produits nuls...).
Présentez cette équation sous forme réduite.

d. Échangez entre différents groupes vos équations et essayez de les résoudre en utilisant la méthode vue précédemment.

e. Vérifiez ensuite entre groupes si les résultats sont corrects.

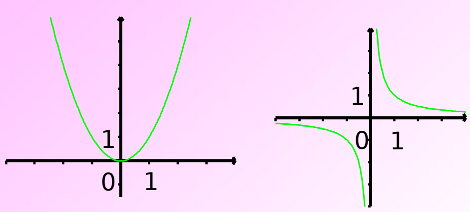
Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	Ce graphique représente une fonction f... 	l'image de -2 est 0	3 est l'image de -2	$f(-2) = 3$	$f(3) = -2$
2	Pour la fonction f représentée ci-dessus, un antécédent de -3 est...	0	1	3	-3
3	x : -1, 0, 1, 2, 3 ; $g(x)$: 2, 1, 6, 5, 2	l'image de 2 par g est -1	$g(2) = 3$	2 a pour image 5 par g	2 est l'image de 5 par la fonction g
4	Par la fonction g ci-dessus, le (les) antécédent(s) de 2 est (sont)...	-1	5	-1 et 5	3
5	$h(x) = 2x^2 - 4$. L'image de 0 par h est...	-4	0	-2	0 n'a pas d'image
6	$m(2) = 4$ donne l'image de 2 par la fonction m telle que...	$m(x) = x - 2$	$m(x) = 3x - 2$	$m(x) = x^2$	$m(x) = \sqrt{x}$
7	$p(x) = \dfrac{x+5}{x^2-4}$ donc...	l'image de -5 par p est 0	0 est l'image de 5 par p	tout nombre a une image par p	2 n'a pas d'image par p
8	Par une fonction...	un nombre peut avoir deux images	tous les nombres ont une image	un nombre peut avoir plusieurs antécédents	tout nombre a au plus une image

Pour aller plus loin

Vers la seconde...

a.



Retrouve les fonctions représentées ci-dessus parmi les fonctions f, g, h et i définies par :

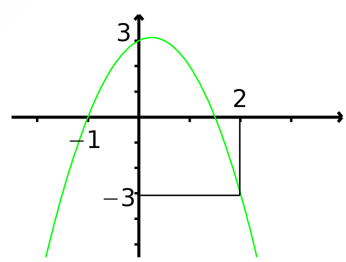
$f(x) = 2x - 1$;

$g(x) = x^2$;

$h(x) = x^2 - 3x + 4$;

$i(x) = \dfrac{1}{x}$.

b.



La courbe ci-dessus représente la fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres.

Détermine les valeurs de a, b et c.