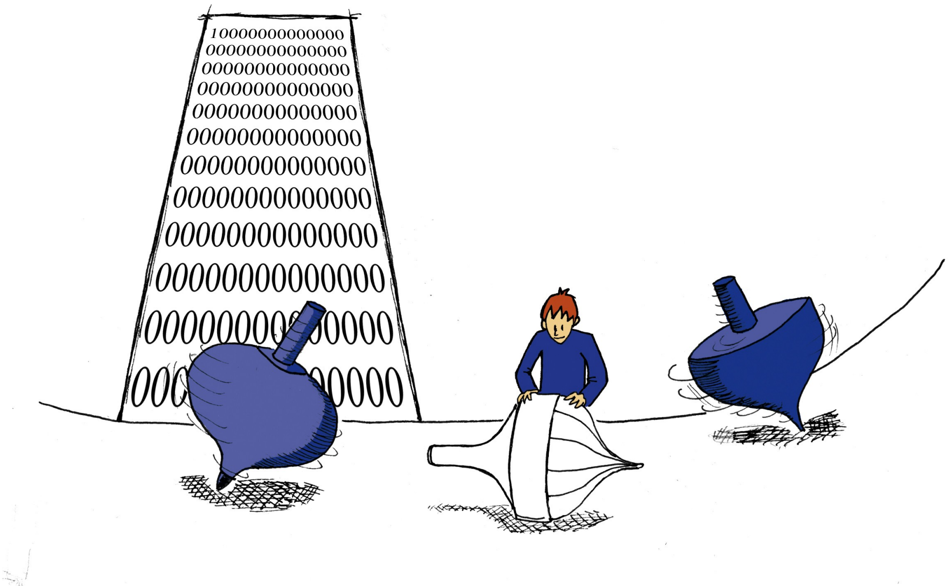
Chapitre N6 : Puissances et grandeurs



Narration de recherche

Trouver le premier chiffre et le nombre de chiffres du nombre $\dfrac{2\,000^{1\,000}}{1\,000^{2\,000}}$

puis comparer les nombres suivants : $\left(1\,000^{2\,000}\right)^{3\,000}$ et $10^{\left(2\,000^{30}\right)}$.

Activité 1 : Produits et quotients de puissances d'un même nombre

1. Rappels et conjectures

a. Recopie et complète les égalités suivantes vues en 4e.

> Pour tous entiers relatifs m et p, on a :
>
> $10^m \times 10^p = 10^{\cdots}$; $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{\cdots}$; $\left(10^m\right)^p = 10^{\cdots}$ et $10^0 = \ldots.$.

b. À l'aide de la définition d'une puissance, calcule 3^2 ; 3^5 ; 3^7 ; 3^{-2} ; 3^{12} et 3^{14}.

c. Déduis-en les valeurs de $3^2 \times 3^5$; $3^7 \times 3^{-2}$; $3^{12} \times 3^2$; $\dfrac{3^7}{3^5}$; $\dfrac{3^{12}}{3^5}$ et $\left(3^7\right)^2$.

Que remarques-tu ? Invente d'autres exemples similaires.

d. Conjecture les règles de calculs avec des puissances d'un même nombre.

Pour la suite, dans les parties **2.**, **3.** et **4.**, a est un nombre non nul et m et p sont deux entiers naturels non nuls.

2. Cas où les deux exposants sont positifs

a. Recopie et complète l'expression $a^m \times a^p = \underbrace{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots \text{ facteurs}}}_{\ldots \text{ facteurs au total}} = a^{\cdots}$.

b. On suppose que $m \geqslant p > 0$. À l'aide de la définition d'une puissance, établis l'égalité $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{\cdots\cdot}$. Que se passe-t-il lorsque $p \geqslant m \geqslant 0$?

c. En utilisant la définition d'une puissance, démontre la formule $\left(a^m\right)^p = a^{m \times p}$.

3. Cas où l'un des deux exposants est négatif

a. En utilisant la définition d'une puissance négative et les égalités trouvées dans la partie **2.**, détermine les relations $a^m \times a^{-p} = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^m}{a^{-p}} = a^{\cdots}$ et $\left(a^m\right)^{-p} = a^{\cdots}$.

b. Que peux-tu dire des expressions $a^{-m} \times a^p$; $\dfrac{a^{-m}}{a^p}$ et $\left(a^{-m}\right)^p$?

4. Cas où les deux exposants sont négatifs

En t'aidant des parties **2.** et **3.**, recopie et complète les égalités $a^{-m} \times a^{-p} = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^{-m}}{a^{-p}} = a^{\cdots}$ et $\left(a^{-m}\right)^{-p} = a^{\cdots}$.

5. Conclusion

Recopie et complète.

> Pour tout nombre a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :
>
> $a^m \times a^p = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{\cdots}$ et $\left(a^m\right)^p = a^{\cdots}$.

Activité 2 : Produits et quotients de puissances de nombres différents et de même exposant

1. Produit

a. Noémie effectue de tête le calcul $2^6 \times 5^6$. Elle annonce son résultat : « Un million ! ». Est-il correct ? Comment a-t-elle fait ?

b. En utilisant la définition d'une puissance d'un nombre, écris les nombres suivants sous forme d'une seule puissance : $7^2 \times 3^2$; $2^3 \times 4^3$. Invente d'autres exemples similaires.

c. Existe-t-il des exemples de produits de puissances qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une seule puissance ? Justifie ta réponse.

d. Soient a et b deux nombres non nuls et n un entier positif. En utilisant la définition d'une puissance d'un nombre, démontre l'égalité $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.
Que peux-tu dire si n est un entier négatif ?

2. Quotient

a. En utilisant la définition des puissances, transforme les nombres suivants en quotients de puissances : $\left(\frac{7}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{11}\right)^4$ et $\left(\frac{-1}{9}\right)^5$.

b. Quelle formule viens-tu de vérifier sur ces exemples ? Démontre-la.

Activité 3 : Changeons d'unités

1. Surface

a. Un champ rectangulaire mesure 455 mètres de long et 8 décamètres de large. Quelle est sa superficie en mètres carrés ? En décamètres carrés ? En hectomètres carrés ?

b. Recherche la définition d'un are et d'un hectare. Exprime alors la superficie du champ dans chacune de ces deux unités.

2. Masses volumiques

a. Une pièce métallique en cuivre a un volume de 2,5 dm^3 et une masse de 22,3 kg.
De plus, on sait que 1 kg d'aluminium occupe un volume de 370 cm^3 et que la masse volumique de l'acier est de 7 850 kg/m^3. Calcule, en kg, la masse d'un décimètre cube de chacun de ces métaux.

b. Une entreprise souhaite construire, pour un modèle de vélo, des cadres métalliques qui soient les plus légers possibles. Quel métal parmi le cuivre, l'aluminium et l'acier a-t-elle intérêt à choisir ? Justifie ta réponse.

3. Mécanique

a. Pour ne pas abîmer le moteur d'une voiture, le constructeur préconise de ne pas dépasser les 4 000 tours par minute. Explique ce que signifie l'expression « 4 000 tours par minute ».

b. Si le moteur effectue 4 000 rotations en une minute, combien en effectuera-t-il en une seconde ? Tu arrondiras ton résultat au centième.

c. Exprime alors cette vitesse de rotation en tours par seconde.

Méthode 1 : Utiliser les formules sur les puissances

À connaître

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$$a^m \times a^p = a^{m+p} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \quad \text{et} \quad (a^m)^p = a^{m \times p}.$$

Exemple 1 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$A = 5^7 \times 5^4$; $B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}}$; $C = (0{,}2^{-3})^4$; $D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi$.

$A = 5^7 \times 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11}$

$B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^{-5+6} = (-2)^1 \ (= -2)$

$C = (0{,}2^{-3})^4 = 0{,}2^{-3 \times 4} = 0{,}2^{-12}$

$D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 \ (= 1)$

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \dfrac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{8^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

$E = \dfrac{(-2)^4 \times (2^2)^{-5}}{(2^3)^{-3}}$ → On remplace 4 par 2^2 et 8 par 2^3.

$E = \dfrac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-9}}$ → On remarque que $(-2)^4 = 2^4$ et on applique les règles sur les puissances.

$E = 2^{4+(-10)-(-9)}$

$E = 2^{4-10+9}$

$E = 2^3$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

À connaître

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$F = 2^3 \times 5^3$; $G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}}$; $H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5}$; $I = \dfrac{\pi^4}{7^4}$.

$F = 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$

$G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}} = \left(\dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right)^{-5} = 3^{-5}$

$H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6 \times \dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5}$

$I = \dfrac{\pi^4}{7^4} = \left(\dfrac{\pi}{7}\right)^4$

Exercice « À toi de jouer »

1 Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$J = 5^4 \times 7^4$; $K = \dfrac{2^{-5} \times 3^8}{(-3)^6 \times 2^{-7}}$; $L = (5^{-2})^3 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 \times 3^2$; $M = \dfrac{12^5}{3^2 \times 6^3}$.

Méthode 2 : Effectuer des changements d'unités de grandeurs produits ou quotients

Exemple 1 : Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de 574,8 km·h⁻¹. Convertis cette vitesse en m·s⁻¹.

574,8 $km \cdot h^{-1}$ signifie que l'on parcourt 574,8 km en 1 h.

Ainsi, 574,8 $km \cdot h^{-1} = \dfrac{574{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}}$.

574,8 km = 574 800 m et 1 h = 3 600 s.

Donc 574,8 $km \cdot h^{-1} = \dfrac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \dfrac{574\,800}{3\,600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \dfrac{479}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 159{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ 159,7 $m \cdot s^{-1}$.

Exemple 2 : La vitesse de rotation du disque dur d'un ordinateur est de 7 200 tours/min. Convertis cette vitesse de rotation en tours par seconde.

7 200 tours/min signifie qu'en une minute, la partie rotative du disque dur effectue 7 200 tours autour de son axe.
1 min = 60 s.

Donc 7 200 tours/min $= \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{60 \text{ s}} = \dfrac{7\,200}{60}$ tours/s = 120 tours/s.

La vitesse de rotation du disque dur est de 120 tours/s.

Exemple 3 : La masse volumique du fer vaut 7,84 $g \cdot cm^{-3}$. Convertis-la en $kg \cdot m^{-3}$.

« La masse volumique du fer vaut 7,84 $g \cdot cm^{-3}$ » signifie que 1 cm^3 de fer a une masse de 7,84 g. Ainsi, 7,84 $g \cdot cm^{-3} = \dfrac{7{,}84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.

7,84 g = 0,007 84 kg et 1 cm^3 = 0,000 001 m^3.

Donc 7,84 $g \cdot cm^{-3} = \dfrac{0{,}007\,84 \text{ kg}}{0{,}000\,001 \text{ m}^3} = \dfrac{0{,}007\,84}{0{,}000\,001} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 7\,840 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La masse volumique du fer vaut donc 7 840 $kg \cdot m^{-3}$.

Exemple 4 : Combien de litres d'eau faut-il pour remplir à ras bord une piscine de 75 m^3 ?

$75 \text{ m}^3 = 75 \times 1 \text{ m}^3 = 75 \times (1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}) = 75 \times (10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm})$.
$10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 10^3 \times 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$.
Donc $75 \text{ m}^3 = 75 \times 1\,000 \text{ dm}^3 = 75\,000 \text{ dm}^3$.
Comme 1 dm^3 = 1 L, il faut 75 000 L d'eau pour remplir cette piscine.

Exemple 5 : Une unité industrielle d'énergie est le mégawattjour (MWj) soit l'énergie correspondant à une puissance d'un mégawatt (MW) fournie pendant un jour.
Sachant que 1 MW = 10^6 W, détermine le nombre de kilowattheures (kWh) qui correspond à un mégawattjour.

1 MW = 10^6 W = 1 000 000 W = 1 000 kW et 1 j = 24 h.
Donc 1 MWj = 1 MW × 1 j = 1 000 kW × 24 h = 24 000 kWh.
Donc 1 MWj correspond à 24 000 kWh.

Exercices « À toi de jouer »

2 La vitesse de propagation du son dans l'air est d'environ 340 m/s. Convertis cette vitesse en km/h.

3 La masse volumique de l'air au niveau de la mer et à une température de 20°C est d'environ 1,2 $kg \cdot m^{-3}$. Convertis cette masse volumique en $g \cdot cm^{-3}$.

4 La puissance maximale de certains moteurs de voitures de Formule 1 approche dans certains cas les 900 chevaux et leur vitesse de rotation peut atteindre les 20 000 tours par minute. Calcule la vitesse de rotation de ces moteurs en tours par seconde.

Puissances

1 Écris sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.

a. $5^2 \times 5^4$ **d.** $2{,}5^{-7} \times 4{,}2^{-7}$ **g.** $(-2)^{-3} \times (-2)^5$

b. $6^5 \times 6^{-8}$ **e.** $-4 \times (-4)^{-7}$ **h.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

c. $3^4 \times 5^4$ **f.** $7^{-5} \times 7$

2 Écris sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.

a. $\frac{3^8}{3^{-4}}$ **c.** $\frac{4^6}{4^2}$ **e.** $\frac{9^{-3}}{(-2{,}5)^{-3}}$

b. $\frac{6^5}{3^5}$ **d.** $\frac{(-4{,}5)^4}{3^4}$ **f.** $\frac{3{,}2^{-5}}{3{,}2^{-2}}$

3 Écris sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.

a. $(2^4)^3$ **b.** $((-5)^{-3})^2$ **c.** $(-4^7)^{-8}$

4 Écris sous la forme d'une seule puissance.

a. $2{,}8 \times 2{,}8^{-3}$ **d.** $\frac{7^{-3}}{2^{-3}}$ **g.** $(-6)^8 \times (-6)^{-3}$

b. $\frac{5^{-2}}{5^{-4}}$ **e.** $((5{,}6)^{-4})^{-2}$ **h.** $5{,}3^{-6} \times 4^{-6}$

c. $((-3{,}7)^{-2})^5$ **f.** $10^7 \times 10^{-7}$ **i.** $\frac{(-4{,}2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$

5 Écris sous la forme d'une seule puissance.

$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$

$B = 11^{-8} \times \frac{11^7}{11^{-4}}$

$C = \frac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

6 Recopie et complète.

a. $3^4 \times 3^{\dots} = 3^9$ **d.** $(5^{\dots})^6 = 5^{-18}$

b. $\frac{2^6}{2^{\dots}} = 2^5$ **e.** $\frac{(-2{,}4)^{\dots}}{(-2{,}4)^{-7}} = (-2{,}4)^{-15}$

c. $4^{\dots} \times 4^{-3} = 4^{-2}$ **f.** $((-3)^2)^{\dots} = (-3)^{-12}$

7 Recopie et complète.

a. $4^{\dots} \times 4^{-5} = \dots^{-5}$ **c.** $2{,}4^{\dots} \times 2^{\dots} = \dots^{-3}$

b. $\frac{28^6}{4^{\dots}} = \dots^6$ **d.** $\frac{\dots^{-7}}{4^{-7}} = 12^{-7}$

8 *Carré magique*

Recopie et complète le tableau avec des puissances de 5, sachant qu'en multipliant les nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale, on obtient toujours le même résultat.

5^{-4}		1
	5^{-1}	
		5^2

9 *Grains de sable*

La dune du Pyla (en Gironde) est la plus haute dune de sable d'Europe.
Elle est constituée de 60×10^6 m^3 de sable.
Le volume moyen d'un grain de sable est égal à 10^{-3} mm^3.

Donne l'écriture scientifique du nombre approximatif de grains de sable qui forment la dune du Pyla.

10 Le digicode de l'immeuble de Flavien comporte dix chiffres et trois lettres.

Le code pour ouvrir la porte d'entrée de l'immeuble est composé de deux lettres suivies de trois chiffres. (Les chiffres et les lettres peuvent se répéter.)

a. Combien de codes différents sont composés de deux lettres suivies de trois chiffres ?

b. Il faut, en moyenne, deux secondes à Flavien pour taper un code.

Combien de temps mettra-t-il pour tester tous les codes possibles s'il a oublié son code ?
Donne le résultat en heures, minutes et secondes.

11 *Remarquable*

a. Vérifie les égalités suivantes.

• $2^1 + 2^1 = 2^2$ • $2^2 + 2^2 = 2^3$ • $2^3 + 2^3 = 2^4$

• $2^{-1} + 2^{-1} = 2^0$ • $2^{-2} + 2^{-2} = 2^{-1}$ • $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2}$

b. Recopie et complète en utilisant les résultats précédents.
« Si n est un entier, il semble que $2^n + 2^n = 2^{\dots}$. »

c. Prouve l'égalité obtenue à la question **b.**.

d. Cette règle est-elle toujours vraie si on remplace 2 par 3 ? Justifie.

12 *Avec la calculatrice*

a. À l'aide de la calculatrice, calcule 4^{20} et recopie l'affichage de la calculatrice.

b. De même, calcule $4^{20} + 1$ et recopie l'affichage de la calculatrice.

c. De même, calcule $4^{20} + 10$ et recopie l'affichage de la calculatrice.

d. Que remarque-t-on pour les affichages obtenus ?
Que peut-on en déduire pour l'affichage de 4^{20} ?

Grandeurs

13 Le moteur d'une moto tourne à la vitesse de 5 000 tours·min⁻¹.
Calcule cette vitesse en nombre de tours par seconde.

14 La vitesse commerciale des TGV est en moyenne de 300 km·h⁻¹.

a. Combien de kilomètres un TVG parcourt-il en 10 min ?

b. Calcule la vitesse moyenne d'un TVG en km·min⁻¹.

c. Calcule cette vitesse en m·s⁻¹, arrondis le résultat à l'unité.

15 La puissance P d'une plaque électrique est de 4 800 W.
Calcule l'énergie E, exprimée en kWh, consommée par cette plaque pendant 10 minutes en utilisant la formule $E = P \times t$ où t est la durée exprimée en h.

16 *Concentration*

Une analyse chimique a montré qu'il y avait 120 mg de magnésium dans 5 L d'eau.
Calcule la concentration, en g/L, de magnésium dans cette eau.

17 *Concentration (bis)*

Une solution a une concentration en sel égale à 250 cg·cL⁻¹.

a. Calcule la concentration en sel de cette solution en g·cL⁻¹.

b. Calcule la concentration en sel de cette solution en g·L⁻¹.

18 *Le plus rapide*

Voici les vitesses atteintes par les cinq mammifères terrestres les plus rapides au sprint.
Antilope : 88 000 m·h⁻¹ ;
Chevreuil : 27,22 m·s⁻¹ ;
Springbok : 0,026 4 km·s⁻¹ ;
Lion : 22,22 m·s⁻¹ ;
Guépard : 0,030 6 km·s⁻¹.

Classe ces champions dans l'ordre décroissant de leur vitesse exprimée en km·h⁻¹.

19 *Masse volumique*

La masse volumique du zinc est de 7,14 kg/dm³.

a. Quelle est, en grammes, la masse de 5 cm³ de ce métal ?

b. Calcule la masse volumique du zinc en g/cm³.

20 Une plaque métallique a une masse surfacique de 15 kg/m².

a. Calcule la masse surfacique de cette plaque en g/cm².

b. Sachant que cette plaque a une forme rectangulaire de longueur 30 cm et de largeur 17 cm, calcule la masse de cette plaque.

21 La masse volumique du mercure est égale à 13 600 kg/m³.
Calcule le volume, en cm³, d'un kilogramme de mercure.

22 Un internaute a téléchargé un fichier de 1,6 Mo en 10 minutes.

a. Quelle est la vitesse de téléchargement en Mo·min⁻¹ ?

b. Calcule la vitesse de téléchargement en kilooctets par seconde, arrondie au dixième.

c. Combien de temps faut-il pour télécharger un fichier de 0,98 Mo à la même vitesse ? Arrondis à la seconde.

23 *Aviron*

Un passionné d'aviron rame à une cadence moyenne de 45 coups de rame par minute.

a. Calcule sa cadence en nombre de coups de rame par heure.

b. En combien de temps fait-il 1 000 coups de rame ? Arrondis le résultat à la seconde.

24 On veut remplir une piscine de 15 m^3 à l'aide d'un robinet dont le débit est de 2 $m^3 \cdot h^{-1}$.

a. Combien de temps faut-il pour remplir complètement cette piscine ?

b. Calcule le débit du robinet en $L \cdot min^{-1}$, arrondis le résultat au centième.

25 *Extrait du Brevet*

Un professeur d'éducation physique et sportive fait courir ses élèves autour d'un stade rectangulaire mesurant 90 m de long et 60 m de large.

a. Calculer, en mètres, la longueur d'un tour de stade.

b. Pour effectuer 15 tours en 24 minutes à vitesse constante, combien de temps un élève doit-il mettre pour faire un tour ? On donnera la réponse en minutes et secondes.

c. Un élève parcourt six tours en neuf minutes. Calculer sa vitesse en m/min puis en km/h.

26 La vitesse atteinte par une balle de tennis est de 95 miles par heure.
On a 1 mile ≈ 1,609 km.

Calcule la vitesse de cette balle en $m \cdot s^{-1}$; arrondis le résultat au dixième.

27 *Différentes unités d'énergie*

L'énergie distribuée par EDF est mesurée en kilowattheures (kWh).

Une autre unité de mesure d'énergie est le Joule (noté J).

On sait que 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.

Les économistes utilisent pour les combustibles (gaz, bois, charbon, ...) une autre unité appelée tonne équivalent pétrole (tep), qui correspond à la quantité d'énergie libérée par la combustion d'une tonne de pétrole.

On sait que 1 tep = $4{,}18 \times 10^{10}$ J.

Tu arrondiras les résultats au centième.

a. Une tonne de charbon a un pouvoir calorifique de $2{,}8 \times 10^{10}$ J.

Exprime ce pouvoir en kWh puis en tep.

b. Calcule, en kWh, l'énergie correspondant à un tep.

c. En France, en 2006, l'énergie consommée par les transports était égale à $50{,}9 \times 10^9$ tep *(Source Insee)*.

Exprime cette énergie en kWh.

28 *Économie d'énergie*

Voici les caractéristiques de deux lave-linge, basées sur un cycle blanc à 60°C dans des conditions normales d'utilisation.

• Lave-linge « Toutnet »

Puissance P : 540 W

Durée moyenne d'un cycle de lavage : 105 min

Capacité de chargement : 5 kg.

• Lave-linge « Maxinet »

Puissance P : 780 W

Durée moyenne d'un cycle de lavage : 110 min

Capacité de chargement : 8,5 kg.

La consommation d'énergie E, exprimée en kWh, se calcule avec la formule $E = P \times t$ où t est la durée exprimée en h.

a. Pour chaque lave-linge, calcule sa consommation d'énergie en kWh par cycle.
Quel est, en kWh par cycle, le lave-linge qui a la plus basse consommation d'énergie ?

b. Pour chaque lave-linge, calcule sa consommation en kWh par kg de linge lavé (en arrondissant au millième si nécessaire).
Quel est, en kWh par kg de linge lavé, le lave-linge qui a la plus basse consommation d'énergie ?

c. Le prix unitaire du kWh est 0,108 5 €.
Pour chaque lave-linge, calcule :

• le coût de l'énergie consommée par cycle ;

• le coût de l'énergie consommée par kg de linge lavé.

29 Dans une canalisation, le débit Q de l'eau (en $m^3 \cdot s^{-1}$) dépend de la vitesse d'écoulement v (en $m \cdot s^{-1}$) et du diamètre D du conduit (en m) selon la formule :

$$Q = 0{,}25 \times \pi \times v \times D^2.$$

a. Calcule le débit Q de l'eau (en $m^3 \cdot s^{-1}$) dans un conduit de diamètre 15 cm dans lequel l'eau s'écoule à la vitesse de v = 5,66 $m \cdot s^{-1}$; arrondis le résultat au centième.
Convertis ce débit en $L \cdot s^{-1}$.

b. On considère une autre canalisation de diamètre 12 cm et pour laquelle le débit de l'eau est égal à 5 100 $L \cdot min^{-1}$.

• Convertis ce débit en $m^3 \cdot s^{-1}$.

• Calcule la vitesse d'écoulement de l'eau dans cette canalisation ; arrondis le résultat au centième.

Exercices d'approfondissement

30 Écris les expressions suivantes sous la forme d'un produit de puissances de nombres entiers, ayant le moins de facteurs possibles. Tu détailleras les étapes de calcul.

$$A = \frac{3^4 \times 2^5 \times 5^6}{3^7 \times 2^9 \times 5^3}$$

$$C = \frac{(-4)^7 \times (-6)^2 \times 3^{-7}}{(-3)^5 \times 4^{-11} \times 6^{-3}}$$

$$B = \frac{7^{12} \times (9^4)^3 \times 5^{-5}}{9^{10} \times (5^{-7})^6 \times 7^{-17}}$$

$$D = \left(\frac{(3^9)^2 \times 5^7}{5^{-8} \times 2^9 \times 3^{19}}\right)^3$$

31 Écris les expressions suivantes sous la forme de la puissance d'un seul nombre. Tu détailleras les étapes de calcul.

$$A = \frac{8^5 \times 12^9}{8^2 \times 12^6}$$

$$C = \frac{7^5 \times 6^3 \times 3^5 \times 8^2}{21^3 \times 2^2 \times 6}$$

$$B = \frac{3^5 \times (4^5)^3}{(4^6)^3 \times (3^4)^2}$$

$$D = \left(\frac{5^{-2} \times 14^{-5} \times (3^{-1})^2}{(7^{-3})^{-2} \times 15^9 \times 2^6}\right)^7$$

32 Sans utiliser de calculatrice et en détaillant les étapes de calcul, donne l'écriture décimale des expressions suivantes.

$$A = \frac{10^5 \times 2^6}{2^2 \times 10^3}$$

$$C = \frac{2{,}5^3 \times 3^{-2} \times 4^3 \times 9^2}{5^9 \times 3^{-6} \times 18^2 \times 2^9}$$

$$B = \frac{10^4 \times 7^{-1}}{2^7 \times 7^{-3} \times 5^7}$$

$$D = \left(\frac{3^{-9} \times (10^{-3})^{-2}}{2^{-1} \times 10^5 \times 3^{-10}}\right)^2$$

33 En détaillant les étapes de calcul, donne l'écriture scientifique des expressions suivantes.

$$A = \frac{8^7 \times 10^9}{8^5 \times 10^2}$$

$$C = \frac{2{,}5^3 \times 6^4 \times 4^3 \times 3^4}{5^9 \times 9^2 \times 2^{11}}$$

$$B = \frac{6^5 \times 49^2 \times 10^{-7}}{3^4 \times 10^7 \times 7^2 \times 16}$$

$$D = \frac{\left(\dfrac{2^3 \times 3^4}{3^3 \times 2}\right)^2}{\dfrac{(10^9)^2}{10^{-4}}}$$

34 *Quand la calculatrice fait des erreurs*

Soit l'expression $A = (10^{11} + 1)(10^{11} - 1)$.

a. Si tu calcules A avec ta calculatrice, quel résultat donne-t-elle ?

b. Développe A sous la forme $10^n - 1$, où n est un entier positif. Quel sera alors le chiffre des unités de A ?

c. La calculatrice a-t-elle donné un résultat exact ? Justifie ta réponse.

35 Avec les puissances de 3

a. Détermine les huit premières puissances de 3 d'exposant positif.

b. Déduis-en une conjecture sur le chiffre des unités de l'écriture décimale de 3^n, où n est un entier positif.

c. En utilisant **b.**, détermine le chiffre des unités des écritures décimales des nombres suivants : 3^{12} ; 3^{23} et 3^{38}.

d. Détermine une puissance de 3 d'exposant supérieur à 150 ayant 7 comme chiffre des unités.

36 *Une « preuve » pour les puissances de 5*

a. Calcule les puissances de 5 suivantes.
5^1 ; 5^2 ; 5^3 ; 5^4 ; 5^5 ; 5^6 et 5^7.

b. Quelle conjecture peux-tu émettre sur le chiffre des unités de 5^n, où n est un entier positif supérieur ou égal à 1 ?

c. Dans cette partie de l'exercice, une « idée » de la démonstration (dite par récurrence) va être développée.

- Recopie et complète l'égalité suivante : $5^{p+1} = 5 \times 5^{\cdots}$, où p est un entier positif supérieur ou égal à 1.
- Étant donné la constatation faite en **b.**, que peux-tu supposer sur le chiffre des unités de l'écriture décimale du nombre 5^p ?
- En supposant que cela soit vrai, que peux-tu alors affirmer pour 5×5^p ?
- Conclus alors sur la valeur du chiffre des unités de 5^{p+1} .

37 *Quelle planète est la plus rapide ?*

Le tableau suivant donne la longueur de l'orbite de quatre planètes de notre système autour du Soleil (en km) ainsi que le nombre de jours qu'elles mettent pour parcourir cette orbite.

Planète	Orbite en km	Révolution en jours
Mercure	$3{,}6 \times 10^8$	88
Terre	$9{,}2 \times 10^8$	365
Mars	$1{,}4 \times 10^9$	687
Uranus	$1{,}8 \times 10^{10}$	30 708

a. Exprime la vitesse de chaque planète sur leur orbite en m/s et en km/h.

b. Range ces planètes dans l'ordre décroissant de leur vitesse.

38 Pour aller chez ses parents, Nabil réalise le trajet suivant.

- De chez lui à la gare, il doit prendre un bus ; celui-ci roule à la vitesse moyenne de 30 km/h et le trajet dure 40 minutes.
- Ensuite, il doit marcher de l'arrêt de bus jusqu'au quai du TER : la distance à parcourir est de 600 mètres et il met un sixième d'heure pour les faire.
- Il attend ensuite 315 secondes le TER.
- Le TER qu'il prend roule à la vitesse moyenne de 12 $m \cdot s^{-1}$ pendant une heure.
- Après 12 minutes de marche à la vitesse de 5 km/h, Nabil arrive chez ses parents.

a. Quelle est la distance parcourue par Nabil entre chez lui et chez ses parents ?

b. Combien de temps a duré son voyage ? Donne le résultat en heures, minutes et secondes.

c. Donne la vitesse moyenne en $m \cdot s^{-1}$, puis en km/h, du trajet total entre le domicile de Nabil et celui de ses parents. Arrondis au dixième.

39 En janvier 2008, Francis Joyon bat le record du tour du monde à la voile en solitaire en 57 jours, 13 heures, 34 minutes et 6 secondes. La distance parcourue était d'environ 20 000 milles nautiques.

a. Détermine la vitesse moyenne de ce record en milles nautiques/h, arrondie au centième.

b. Sachant qu'un mille nautique représente 1,852 km, calcule la vitesse moyenne du parcours en $km \cdot h^{-1}$. Arrondis au centième.

c. Le précédent record était détenu par Ellen MacArthur depuis 2005 en 71 jours, 14 heures, 18 minutes et 33 secondes. À quelle vitesse moyenne a-t-elle effectué son tour du monde ? (Tu exprimeras, en $m \cdot s^{-1}$, le résultat arrondi à l'unité.)

d. Si Francis Joyon et Ellen MacArthur étaient partis le même jour du même endroit, lorsque Francis Joyon aurait franchi la ligne d'arrivée, à quelle distance de celui-ci se serait trouvée Ellen MacArthur ? Exprime la distance en milles nautiques et en kilomètres (arrondie à l'unité).

F. Joyon sur IDEC, à son arrivée à Brest. (Source Wikipédia ; photo de M. Briand)

40 Un haltère en acier est composé d'un cylindre de hauteur 0,2 m et dont la base est un disque de diamètre 3 cm sur lequel sont soudées deux « boules identiques » de diamètre 1,2 dm.

a. Détermine le volume exact, en dm^3, de cet haltère puis arrondis au centième de dm^3.

b. Sachant que la masse volumique de l'acier constituant cet haltère est de 7,8 g/cm^3, calcule la masse de l'haltère arrondie au gramme.

41 L'unité de trafic de voyageur est le voyageur·km. Elle représente le déplacement d'un voyageur sur une distance d'un kilomètre et permet de tenir compte de la distance parcourue par chaque voyageur.

a. Si douze personnes voyagent sur 20 km, quel sera le trafic de voyageurs ?

b. Si quatre personnes voyagent sur 10 km et qu'une cinquième voyage sur 200 km, quel sera alors le trafic de voyageurs ?

c. Au cours de son trajet, un bus a transporté huit personnes sur 1 km, quatre sur 3 km, dix sur 5 km et deux sur 12 km.
Sur une autre ligne, un bus a transporté vingt personnes sur 2 km, un sur 7 km, trois sur 8 km et deux sur 11 km.
Quel bus a eu le plus grand trafic de voyageurs ?

42 *Quantité de mouvement*

On appelle quantité de mouvement d'un système le produit de sa masse par la vitesse de son centre de gravité.

a. Donne l'unité utilisée pour exprimer la quantité de mouvement (en respectant les unités du système international).

b. Détermine la quantité de mouvement :

- d'un satellite de masse 250 kg qui se déplace autour de la Terre à la vitesse de 2 700 $m \cdot s^{-1}$;
- d'une moto et son conducteur d'une masse totale de 150 kg roulant à la vitesse de 108 km/h ;
- d'une locomotive pesant 100 t roulant à la vitesse de 150 $km \cdot h^{-1}$;
- d'un électron de masse $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg dont la vitesse est de 25 000 km/s.

c. Quelle est la vitesse d'un système ayant pour quantité de mouvement 10^{-3} (unité trouvée en **a.**) et dont la masse serait de 10^{-15} kg ? Est-ce possible ? Justifie ta réponse.

1 Épaisseur d'une feuille de papier

1re Partie : Test de « pliage »

L'objectif de cette partie est de voir combien de « pliages » successifs on peut effectuer avec une feuille de papier de format A4.

a. Pliez chacun une feuille de papier en deux puis de nouveau en deux et ainsi de suite autant de fois que vous le pouvez.

b. Comptez chacun le nombre de pliages que vous avez réussi à effectuer. Comparez vos résultats.

c. Combien de pliages avez-vous réussi à effectuer au maximum ?

d. Mesurez, le plus précisément possible, la hauteur de la feuille la plus pliée.

e. Comparez vos résultats (nombre de pliages et hauteur) avec ceux des autres groupes.

2e Partie : Calcul de l'épaisseur du pliage

On considère qu'une feuille de papier a pour épaisseur 100 µm (cent micromètres).

f. Exprimez à l'aide d'une puissance de 10 l'épaisseur d'une feuille de papier en mètre.

g. Une fois le premier pliage effectué, quelle est l'épaisseur obtenue en mètre ?

h. Une fois le second pliage effectué, quelle est l'épaisseur obtenue en mètre ?

i. Une fois le « n-ième » pliage effectué (n est un entier positif), quelle est l'épaisseur obtenue, exprimée en fonction de n en mètre ?

j. Calculez l'épaisseur théorique, en mètre, d'une feuille pliée autant de fois que vous l'avez fait à la question **b.**.

k. Déterminez le pourcentage d'erreur entre la valeur théorique et votre mesure faite à la question **d.**.

l. Programmez une feuille de calcul sur laquelle l'objectif est de calculer l'épaisseur d'une feuille lors des 100 premiers pliages.

	A	B
1	Nombre de pliages	Épaisseur en mètre du « pliage »
2	0	
3	1	
4	2	
...	...	
102	100	

m. Au bout de combien de pliages, l'épaisseur de la feuille dépasse-t-elle le mètre ?

n. Au bout de combien de pliages, la taille de la tour Eiffel (environ 320 m) est-elle dépassée ?

o. La distance Terre-Lune est d'environ 384 403 km. Combien de pliages sont nécessaires pour atteindre cette distance ?

2 Comparaison Terre - Lune

Selon de nombreux astronomes, la Lune, satellite naturel de la Terre, serait une « partie » de notre planète qui se serait détachée suite à une collision qui s'est produite quelques millions d'années après la formation du système solaire. Vous allez étudier le volume perdu par la Terre suite à cette collision.

1re Partie : Recherche des données

Cherchez, sur Internet ou dans un dictionnaire, les informations suivantes :

- le rayon équatorial de la Terre et de la Lune en kilomètres ;
- la masse de la Terre et de la Lune en kilogrammes.

2e Partie : Calculs avec les données

Dans cette partie, on considère que la Terre et la Lune sont deux boules ayant pour rayon leur rayon équatorial.

Répartissez-vous dans le groupe les **questions a.**, **b.**, **c.** et **d.**. Vous arrondirez les résultats au dixième. Une fois les calculs effectués, vérifiez collectivement vos réponses.

a. Calculez le volume théorique de la Terre.

b. Calculez le volume théorique de la Lune.

c. Déterminez la masse volumique de la Terre.

d. Déterminez la masse volumique de la Lune.

3e Partie : Exploitation des calculs

Dans cette partie, vous utiliserez les calculs faits dans la partie précédente.

e. Si la Lune avait la même masse volumique que la Terre, quel aurait été le volume de la Lune ? (On considère que sa masse est celle trouvée dans la **1re partie**.)

f. Si on considère que la Lune provient d'une collision avec la Terre, quelle proportion de son volume, exprimée en pourcentage, la Terre a-t-elle perdu lors de la création de la Lune ?

g. Reprenez les questions **e.** et **f.** en considérant que la Terre a la même masse volumique que la Lune.

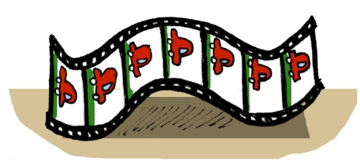
Source Wikipédia.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	$2^5 \times 2^8$ est égal à...	$2^4 \times 2^9$	2^{40}	2^{13}	$2^7 \times 2^7$
2	$7^3 \times 7^{-4}$ est égal à...	7^{-7}	7^{-1}	7^{-12}	$\frac{1}{7}$
3	$2^5 \times 3^4 \times 2^{-2} \times 3^{-2}$ est égal à...	72	$\frac{2^5 \times 3^4}{6^2}$	$2^3 \times 3^2$	36^5
4	$\frac{5^8}{5^3}$ est égal à...	5^{11}	5^5	3 125	625
5	$\frac{9^3}{9^5}$ est égal à...	9^8	$\frac{1}{81}$	9^{-2}	9^{15}
6	$(6^3)^{10}$ est égal à...	6^{13}	6^{30}	$(6 \times 6 \times 6)^{10}$	$(6^{10})^3$
7	$(8^{-2})^8$ est...	égal à 8^{-10}	une puissance de 4	égal à -16^8	égal à $\left(\frac{1}{8^2}\right)^8$
8	Pour convertir $5\ m{\cdot}s^{-1}$ en $km{\cdot}h^{-1}$, il suffit de...	multiplier 5 par 3 600 puis de diviser le résultat par 1 000	diviser 5 par 3 600	multiplier 5 par 1 000 puis de diviser le résultat par 3 600	multiplier 5 par 3 600
9	Une voiture qui roule à $120\ km{\cdot}h^{-1}$ parcourt...	environ 33 m en 1 s	2 000 km en un jour	2 km en 1 min	150 km en une heure
10	Un Canadair peut lâcher 5 455 L d'eau soit...	5,455 m^3 d'eau	environ cinq millions de millilitres d'eau	54,55 hL d'eau	545,5 dL d'eau
11	La masse volumique de l'eau est proche de $1\ kg{\cdot}dm^{-3}$. On peut dire que...	1 L d'eau a pour masse 1 g	1 hL d'eau a pour masse 1 quintal	la masse volumique de l'acier est inférieure à $1\ kg{\cdot}m^{-3}$	1 cL d'eau a pour masse 10 g
12	Un cheval de bois est posé à 6 m du centre du plateau du manège enchanté. Sa vitesse est de trois tours par minute. Donc...	sa vitesse est d'environ 2 m par seconde	il fait un tour en 20 s	il fait quatre tours en 1,5 min	sa vitesse est d'environ $3\ km{\cdot}h^{-1}$

Récréation mathématique

Petit paradoxe...



Au cinéma, quand on voit une voiture avancer, les pneus tournent souvent à l'envers !
Après quelques calculs, le mystère sera levé...

a. La voiture filmée roule à 110 km/h. Ses pneus ont un diamètre de 54 cm. Exprime la vitesse du pneu en tours par seconde.

b. La vitesse de défilement d'un film sur bobine est de 24 images par seconde. Combien de tours aura fait le pneu entre deux images ?

c. Explique le phénomène.