

Activité 1 : Une usine de chocolats

1. Nombre de cartons de chocolats réalisés en une journée de travail

Dans une usine, on fabrique deux types de chocolats : des noirs et des blancs. La chaîne fabrique d'abord tous les chocolats noirs puis tous les chocolats blancs. Il faut sept minutes pour sortir un carton de chocolats noirs et neuf minutes pour un carton de chocolats blancs.

La journée de production de cette usine est de 16 h. Dans cette partie, on recherche le nombre de cartons de chocolats noirs et de chocolats blancs que l'usine peut produire en exactement 16 h.

- Si on fabrique six cartons de chocolats noirs, combien de cartons de chocolats blancs cette usine fabrique-t-elle en une journée de travail ?
- Si on produit 46 cartons de chocolats blancs, combien de cartons de chocolats noirs cette usine fabrique-t-elle en une journée de travail ?
- Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

Cartons de chocolats noirs	6		33		51
Cartons de chocolats blancs		46		60	

- On connaît le nombre de cartons de chocolats noirs produits sur une journée. On note x ce nombre et y le nombre de cartons de chocolats blancs. Exprime y en fonction de x .
- Dans un tableur, reproduis la feuille de calcul ci-contre et programme la cellule B2 pour calculer y en fonction de x lorsque x varie de 1 à 100.
- Quelles sont les différentes possibilités de production pour une journée de travail ?

	A	B
1	x	y
2	1	
3	2	

2. Nombre de cartons de chocolats fabriqués avec toutes les matières premières

L'usine doit utiliser entièrement les matières premières qu'elle achète pour fabriquer ses chocolats. Il faut 64 kg de matières premières pour fabriquer un carton de chocolats noirs et 56 kg pour les chocolats blancs. 7 384 kg de matières premières sont à utiliser par jour.

- Avec exactement 7 384 kg de matières premières, détermine le nombre de cartons de chocolats blancs réalisables, si on fabrique 34 cartons de chocolats noirs.
- Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

Cartons de chocolats noirs	34	90			69
Cartons de chocolats blancs			109	69	

- Exprime le nombre z de cartons de chocolats blancs produits en fonction du nombre x de cartons de chocolats noirs produits.
- Dans la feuille de calcul du 1., ajoute une colonne pour calculer z en fonction de x .
- Combien de cartons de chocolats noirs et de chocolats blancs peut-on fabriquer avec 7 384 kg de matières premières ? Cite toutes les possibilités.

3. On cherche le nombre de cartons de chocolats noirs et de chocolats blancs à produire en 16 h avec exactement 7 384 kg de matières premières.

- Dans la feuille de calcul précédente, insère un graphique de type ligne pour représenter y et z en fonction de x .
- Quelle(s) est (sont) la (les) solution(s) possible(s) de ce problème ?

Activité 2 : De manière approchée

1. Avec un graphique

On considère l'équation $6x + 3y = 10$ où x et y sont les deux inconnues.

On cherche des valeurs de x et de y qui vérifient cette égalité.

- a. Si x vaut 1, quelle est la valeur de y qui vérifie l'égalité précédente ?
De la même façon, si y vaut 6, détermine x pour que l'égalité soit vraie.

- b. Recopie et complète le tableau suivant de telle sorte que l'égalité soit vraie.

Valeurs de x	1		10		- 1,2		- 2		$\sqrt{3}$	
Valeurs de y		6		- 2		0		1,6		$\frac{3}{4}$

- c. On appelle solution d'une équation du premier degré à deux inconnues tout couple de valeurs de x et de y noté $(x ; y)$ pour lequel l'égalité est vraie.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $6x + 3y = 10$? Cites-en quelques-unes.

- d. Place dans un repère les points de coordonnées $(x ; y)$ que tu as déterminés dans le tableau précédent. Que remarques-tu ?

- e. Reprends les questions a. à d. avec l'équation $2x - 3y = 4$. (Tu placeras les points obtenus dans le même repère que précédemment.)

- f. On cherche maintenant des couples de valeurs $(x ; y)$ qui sont solutions des deux équations simultanément.

On dit alors d'un tel couple qu'il est solution du système de deux équations du premier degré à deux inconnues noté :
$$\begin{cases} 6x + 3y = 10 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

D'après le graphique, combien de solutions admet ce système ? Lis ces solutions sur le graphique.

- g. Vérifie ta réponse en remplaçant x et y par les valeurs trouvées dans la question f.
Peux-tu conclure ?

2. Avec un tableur

- a. Quelle formule dois-tu programmer dans la cellule B2 pour calculer y_1 dans la première équation quand on connaît x ?

Quelle formule dois-tu programmer dans la cellule C2 pour calculer y_2 dans la deuxième équation quand on connaît x ?

- b. Insère un graphique de type ligne pour représenter y_1 et y_2 en fonction de x .

- c. Peux-tu trouver une solution au système en utilisant les résultats des deux premières questions ?

- d. En affinant le choix des valeurs de x dans la feuille de calcul, tente de trouver une solution au système.

	A	B	C
1	x	y_1	y_2
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

Activité 3 : Un peu extrême

1. D'une extrémité...

On considère le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 5x - y = 1 \\ -35x + 7y = -7 \end{cases}$$

- a. Reproduis deux fois le tableau suivant puis complète un tableau pour chaque équation du système.

Valeurs de x	1		- 2		- 0,2
Valeurs de y		3		7	

- b. Place dans un même repère les points des deux tableaux. Que remarques-tu ?
 c. Dédus des questions a. et b. le nombre de solutions que semble avoir le système.
 d. Démontre-le.

2. ... à l'autre

- a. Reprends les questions a. et b. de la partie 1. avec le système
$$\begin{cases} -12x + 3y = 15 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

- b. Que penses-tu du nombre de solutions de ce système ?
 c. Démontre-le.

3. Au final

Que peux-tu dire du nombre de solutions que peut admettre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ?

Activité 4 : Une méthode de résolution

On considère le système
$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x - 5y = 57 \end{cases}$$

Justinien remarque : « Je sais résoudre une équation du premier degré à une inconnue donc si je peux écrire une inconnue en fonction de l'autre, je pourrai obtenir une équation du premier degré à une inconnue. ».

- a. Écris toutes les possibilités qu'a Justinien pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre.
 b. En utilisant une des expressions trouvées, comment doit s'y prendre Justinien pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue ?
 c. Choisis une des expressions que tu as trouvées à la question a. et détermine une des deux inconnues.
 d. Utilise maintenant la valeur déterminée à la question précédente pour trouver la valeur de la deuxième inconnue.
 e. Teste le couple de valeurs $(x ; y)$ trouvé et conclus.

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par substitution.

Activité 5 : Et une autre méthode !

On considère le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ -3x - 7y = 25 \end{cases}$$

- Résous ce système en utilisant la méthode par substitution.
- Hakim remarque qu'en additionnant les deux premiers membres des équations, on réussit à « éliminer les termes en x » dans le calcul.
 - Qu'obtiens-tu en additionnant les premiers membres de ces équations ?
 - Que vaut cette somme ?
 - Déduis-en une équation d'inconnue y et résous-la.
- Hakim se dit maintenant que pour trouver x , il suffirait de pouvoir « éliminer » y !
 - Comment devraient être les coefficients de y dans les deux équations pour « éliminer les termes en y » de la même façon qu'à la question précédente ?
 - Que peux-tu faire à chacune des équations pour y parvenir ?
 - Transforme les équations pour obtenir une équation du premier degré d'inconnue x en procédant de la même façon qu'à la question **b.**
 - Résous cette équation.
- Teste le couple trouvé et conclus.
- Compare la méthode utilisée dans la question **a.** et celle que tu viens de mettre en œuvre dans les questions **b.** et **c.**

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par combinaisons.

Activité 6 : Problème

- Salomé propose une énigme à sa petite sœur :

Dans un élevage de poules et de lapins, j'ai compté 2 171 têtes et 4 368 pattes.
Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ?

- Combien ce problème possède-t-il d'inconnues ?
 - Traduis ce problème par un système d'équations du premier degré.
 - Résous le système par la méthode de ton choix.
 - Vérifie que le couple trouvé est bien la solution du problème posé.
 - Conclus.
- Est-il possible d'avoir compté dans cette basse-cour 2 171 têtes et 5 367 pattes ? Justifie.
 - Et 2 171 têtes et 2 368 pattes, c'est possible ? Justifie.
 - Et 2 171 têtes et 8 684 pattes ? Justifie.

Méthode 1 : Tester des valeurs dans un système d'équations

À connaître

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré à **deux inconnues** désignées par les lettres x et y . Un couple de nombres $(x ; y)$ est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2 ; -3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = 2$ et $y = -3$:

$$5x + 2y = 5 \times 2 + 2 \times (-3) = 10 - 6 = 4 \text{ et } -2x + y = -2 \times 2 + (-3) = -7.$$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple

$$(2 ; -3) \text{ est solution du système } \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}.$$

Exercice « À toi de jouer »

1 $(-5 ; 1,5)$ et $(-3,5 ; 3,5)$ sont-ils solutions du système $\begin{cases} 4x - 3y = -24,5 \\ 3x + 7y = -4,5 \end{cases}$?

Méthode 2 : Résoudre un système par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$$y = 9 + 3x$$

→ On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$$4x - 3(9 + 3x) = -17$$

→ On remplace (substitue) y par $9 + 3x$ dans la deuxième équation.

$$\begin{aligned} 4x - 27 - 9x &= -17 \\ -5x &= 10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

→ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x .

$$\begin{aligned} y &= 9 + 3 \times (-2) \\ y &= 9 - 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

→ On remplace x par -2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y .

$$\text{Donc, si } \begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

On vérifie ensuite que le couple $(-2 ; 3)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**. On en déduit que $(-2 ; 3)$ est la solution de ce système.

Exercice « À toi de jouer »

2 Résous par substitution le système $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ -3x + 4y = 22 \end{cases}$.

Méthode 3 : Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$$\begin{cases} 5 \times (5x - 4y) = 5 \times 8 \\ 4 \times (2x + 5y) = 4 \times 1 \end{cases} \longrightarrow$$

On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases} \longrightarrow$$

On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$$25x + 8x = 40 + 4 \longrightarrow$$

On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y .

$$\begin{aligned} 33x &= 44 \\ x &= \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3} \end{aligned} \longrightarrow$$

On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x .

Détermination de l'autre inconnue

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ 5 \times (2x + 5y) = 5 \times 1 \end{cases} \longrightarrow$$

On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la seconde par **5**.

$$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases} \longrightarrow$$

On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.

$$-8y - 25y = 16 - 5 \longrightarrow$$

On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

$$\begin{aligned} -33y &= 11 \\ y &= \frac{11}{-33} = -\frac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \longrightarrow$$

On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y .

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y , on pouvait aussi remplacer x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Exercices « À toi de jouer »

3 Résous par combinaisons le système : $\begin{cases} 3x - 7y = 29 \\ 4x - 5y = -33 \end{cases}$ | **4** Résous par la méthode de ton choix le système : $\begin{cases} -2x + 3y = 3,5 \\ x - 4y = -5,5 \end{cases}$.

Méthode 4 : Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €. Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. \longrightarrow **On repère les inconnues.**
On les note généralement x et y .

Étape n°2 : Mettre le problème en équation

205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.
La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4,50y = 1\,222,50$. \longrightarrow **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y .

Ainsi $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases}$. \longrightarrow L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système

On peut résoudre le système par substitution.

$x = 205 - y$ \longrightarrow On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.

$7(205 - y) + 4,50y = 1\,222,50$ \longrightarrow On remplace (substitue) x par **205 - y** dans la deuxième équation.

$1\,435 - 7y + 4,50y = 1\,222,50$
 $- 2,50y = - 212,50$
 $y = 85$ \longrightarrow On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y .

$x = 205 - 85$
 $x = 120$ \longrightarrow On remplace y par **85** dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x .

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème

Donc, si $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

Exercice « À toi de jouer »

5 Dans une boulangerie, Paul a acheté quatre croissants et trois pains au chocolat pour 5,65 €. Lina a acheté, dans cette même boulangerie, trois croissants et cinq pains au chocolat pour 6,85 €. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.

Tester une solution

1 Tour de chauffe

a. Vérifie que le nombre -5 est solution de l'équation $3x + 7 = -8$.

b. Vérifie que le couple $(3; -2)$ est solution des équations et du système suivants.

$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 7x + 6y = 9 \end{cases} \quad \bullet \quad \begin{cases} -x + 2y = -7 \\ 2x - 5y = 16 \end{cases}$$

2 Histoires de couples

a. Les couples $(2; 1)$; $(-1; -5)$; $(0; -3)$ et $(-2; 3)$ sont-ils solutions des équations suivantes ?

$$\bullet \quad 2x - y = 3 \quad \bullet \quad 3x + y = -3$$

b. Le couple $(-2; 3)$ est-il solution des systèmes suivants ?

$$\bullet \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases} \quad \bullet \quad \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ 7x + 4y = -2 \end{cases}$$

3 De l'aide

a. Jacques a trouvé trois couples de solutions pour les équations ci-dessous : $(3; 4)$; $(1; 1)$ et $(-2; 4)$. Détermine de quelle(s) équation(s) chaque couple est solution.

$$\begin{aligned} \bullet \quad & 3x - 2y = 1 \\ \bullet \quad & 5x - 7y = -2 \\ \bullet \quad & 3x + y = -2 \end{aligned}$$

b. Peux-tu en déduire un couple de solutions pour chacun des systèmes suivants ?

$$\bullet \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x - 7y = -2 \end{cases} \quad \bullet \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$$

4 Combien de couples sont solutions des systèmes suivants ?

$$\text{a.} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{c.} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 5y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{d.} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$$

Résoudre un système par substitution

5 Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution.

$$\text{a.} \quad \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 7y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} 5x - 2y = -7 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$$

$$\text{c.} \quad \begin{cases} 6x + y = 8 \\ 10x + 7y = -8 \end{cases}$$

$$\text{d.} \quad \begin{cases} 7x + 4y = -5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

6 Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution.

$$\text{a.} \quad \begin{cases} 5x - y = 13 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -x - 4y = 21 \end{cases}$$

7 Avec un peu d'astuce

Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution.

$$\text{a.} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + 15y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} 2x - 6y = -8 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$$

$$\text{c.} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Résoudre un système par combinaisons

8 Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaisons.

$$\text{a.} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + 7y = -7 \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 5x + 7y = 9 \end{cases}$$

9 Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaisons.

a.
$$\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 4 \end{cases}$$

10 Avec un peu d'astuce (bis)

Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaisons.

a.
$$\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ 9x + 10y = -6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 5x + 4y = 11 \\ 15x + 2y = -7 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2x + y = 21 \\ 4x - 3y = -13 \end{cases}$$

Résoudre en choisissant la bonne méthode

11 La course

a. Résous les systèmes suivants dans un premier temps avec la méthode par substitution et dans un deuxième temps avec la méthode par combinaisons.

•
$$\begin{cases} x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$$
 •
$$\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

b. Compte le nombre d'étapes nécessaires pour chaque résolution.

c. Formule un critère qui permette de choisir judicieusement la méthode à utiliser en fonction de la forme du système à résoudre.

d. Applique ce critère pour résoudre les deux systèmes suivants le plus rapidement possible.

•
$$\begin{cases} 3x + 6y = -13 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$
 •
$$\begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

12 Résous les systèmes suivants avec la méthode de ton choix.

a.
$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 7x + 10y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ 3x - 7y = -2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 10x + 3y = -7 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x - 7y = 31 \end{cases}$$

13 On considère le système suivant.

$$\begin{cases} 4x + 7y = 9 \\ 8x + 14y = 5 \end{cases}$$

a. Modifie le système en multipliant la première équation par -2 puis additionne membre à membre les deux équations.

b. Que remarques-tu ?

c. Que peux-tu en déduire pour ce système ?

14 Voici un système :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7,5x + 3y = 6 \end{cases}$$

a. Résous le système par combinaisons.

b. Que remarques-tu ?

c. Que peux-tu en déduire pour ce système ?

Problèmes

15 Extrait du Brevet

a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55,5 \end{cases}$$

b. Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes.

Léa achète six boîtes et cinq albums et paie 57 €. Hugo achète trois boîtes et sept albums et paie 55,50 €. Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?

16 Parmi les quatre systèmes ci-dessous, détermine celui qui permettra de résoudre le problème suivant.

« À la boulangerie, Matteo achète deux parts de pizza et quatre parts de flan pâtissier. Il paie 12 €. Salim achète trois parts de pizza et deux parts de flan pâtissier. Il paie 9,80 €.

a. Quel est le prix d'une part de pizza ?

b. Quel est le prix d'une part de flan pâtissier ? »

$$\begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 3x - 2y = 9,80 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 9,80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 3x + 2y = 9,80 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 9,80 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

17 Dures dures les ordures

L'agglomération du pays mathois lance une grande campagne pour inciter à ne plus jeter les déchets sur la voie publique.

En plus des affichages publicitaires, elle va implanter dans les rues 4 600 poubelles. Elle va aussi organiser leur collecte qui sera assurée par 18 employés municipaux.



Le président de cette communauté de communes dispose de deux devis pour l'achat de camions-poubelle.

Le premier propose des camions pouvant embarquer trois employés municipaux et transporter le contenu de 800 poubelles.

Le deuxième propose des camions pouvant embarquer quatre employés et transporter le contenu de 1 000 poubelles.

Combien de camions de chaque sorte la communauté de communes devra-t-elle acheter ?

18 Extrait du Brevet

Perrine possède 100 €. Elle souhaite acheter des disques et des livres.

Si elle achète quatre disques et cinq livres, il lui manque 9,50 €. Si elle achète trois disques et quatre livres, il lui reste 16 €.

Calculer le prix d'un disque et celui d'un livre.

19 Une entreprise de recyclage récupère, entre autres, de vieux radiateurs en fonte sur des chantiers de démolition. Les radiateurs réparés sont ensuite revendus au poids.

Georges a acheté trois radiateurs de 60 cm et deux radiateurs de 80 cm pour 68 € et Martin a acheté quatre radiateurs de 60 cm et trois radiateurs de 80 cm pour 96 €.

a. Quel est le prix d'un radiateur de 60 cm ? Et celui d'un radiateur de 80 cm ?

b. Raymond voudrait acheter deux radiateurs de 60 cm et cinq radiateurs de 80 cm. Détermine le prix de revient de son installation s'il se fournit lui aussi dans cette entreprise de recyclage.

20 Mehdi et Martial ont acheté des stylos plume et des cartouches à la papeterie.

Mehdi paie 15 € pour deux stylos et cinq lots de cartouches. Martial paie 10,20 € pour un stylo et quatre lots de cartouches.

a. Quel est le prix d'un stylo ? Et celui d'un lot de cartouches ?

b. Une semaine plus tard, la papeterie solde : - 10 % sur les stylos et - 15 % sur les lots de cartouches. Quels prix Mehdi et Martial auraient-ils payés s'ils avaient patienté ?

21 Peux-tu trouver deux nombres entiers tels que leur différence soit égale à 14 et que le double de leur somme soit égal à 130 ?

22 La division euclidienne de deux nombres entiers naturels donne un quotient égal à 7 et un reste égal à 2.

La somme de ces deux nombres entiers est égale à 138.

Détermine ces deux nombres entiers.

23 Extrait du Brevet

a. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

b. Le CDI d'un collège a acheté deux exemplaires d'une même bande dessinée et trois exemplaires d'un même livre de poche pour la somme de 30 €.

La bande dessinée coûte 5 € de plus que le livre de poche.

Quel est le prix en euros de la bande dessinée ? Quel est le prix en euros du livre de poche ?

24 Deux types de voiliers participent à une régata (course) à Brest :

- les « 470 » qui ont à bord deux personnes ;
- les « Europe » qui sont manœuvrés par une seule personne.



Source Wikipédia.
Licence GnuFDL 1,2.

On compte au départ de la régata 52 voiliers et 82 personnes.

Quel est le nombre de voiliers de chaque catégorie ?

25 Pour faire plaisir

Jérémy veut acheter des fleurs pour sa petite amie. Il choisit un bouquet composé de 13 fleurs : des lys à 3,20 € pièce et des asters à 2,30 € pièce. Le prix de sa composition est de 37,10 €. Détermine la composition exacte du bouquet.

26 Dans un collège

Parmi les 1 500 élèves que compte un collège, 455 d'entre eux vont visiter le château de Versailles. Ce groupe de 455 élèves représente 28 % des filles et 32 % des garçons du collège.

Combien y a-t-il de filles et de garçons dans ce collège ?

27 Thalès à la rescousse

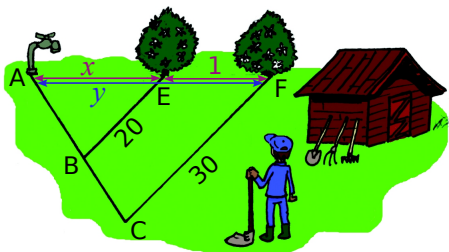
Afin d'éviter les pertes d'eau, la mairie de Résousy souhaite installer un système d'arrosage automatique enterré dans un jardin municipal triangulaire schématisé ci-dessous par le triangle ACF.

Le long de [BE] et [CF] vont être plantées deux rangées parallèles de seringa. Le jardinier municipal a donc enterré 20 m puis 30 m de tuyaux poreux. Mais il s'est retrouvé à court de tuyau et doit encore relier E et F à A où se trouve l'arrivée d'eau. Grand étourdi, il a aussi oublié son mètre.

$$AE = x$$

$$AF = y$$

$$EF = 1 \text{ m}$$



Les points A, E et F sont alignés ainsi que les points A, B et C.

Aide-le à déterminer les longueurs AE et AF, afin qu'il puisse revenir avec la quantité de tuyaux nécessaire.

28 Des fruits

Le kcal (kilocalorie) est la mesure de l'énergie d'un aliment.

La valeur énergétique de 300 g de bananes et de 250 g de clémentines est de 320 kcal.

La valeur énergétique de 150 g de bananes et de 400 g de clémentines est de 215 kcal.

Détermine la valeur énergétique de 80 g de bananes et de 140 g de clémentines.

29 Sur le marché de Noël

Sur le marché de Noël, trois amis achètent les mêmes bougies parfumées et des plats décoratifs identiques.

Rémi achète trois bougies parfumées et cinq plats décoratifs. Il paie 72,30 €.

Yvan achète cinq bougies parfumées et trois plats décoratifs pour 68,50 €.

Kamel achète deux bougies parfumées et un plat décoratif. Combien va-t-il payer ?

30 Économie d'énergie.

Pour inciter les ménages français à modérer leur consommation d'énergie aux heures de pointe, EDF propose un contrat de type « heures pleines-heures creuses ».

Le coût de l'électricité est alors moins élevé pendant les heures creuses (c'est-à-dire pendant huit heures par jour, en général de 22 h à 6 h).

La consommation d'énergie s'exprime en kilowattheures (kWh).

a. Une consommation de 1 500 kWh en heures pleines et de 2 500 kWh en heures creuses coûte 328 € (hors abonnement).

Une consommation de 2 000 kWh en heures pleines et de 1 500 kWh en heures creuses coûte 316,15 € (hors abonnement).

Détermine le prix exact d'un kWh en heures pleines et celui d'un kWh en heures creuses.

b. Dans des conditions d'utilisation identiques :

- un cycle d'un lave-linge et deux cycles d'un lave-vaisselle coûtent 0,759 5 € en heures pleines ;

- trois cycles de ce même lave-linge et quatre cycles de ce même lave-vaisselle coûtent 1,057 6 € en heures creuses.

Détermine la consommation d'énergie par cycle du lave-linge et la consommation d'énergie par cycle du lave-vaisselle.



Source Wikipédia.
Domaine public.



31 Résous les systèmes suivants avec la méthode de ton choix.

a.
$$\begin{cases} 3x = y + 14 \\ 3y - 2x + 21 = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x + 5y = 3x - 2y - 59 \\ 7x + 9y = 3y - 5x + 78 \end{cases}$$

32 Résous les systèmes suivants avec la méthode de ton choix.

a.
$$\begin{cases} \frac{x+5}{2} - \frac{3-y}{5} = 2,3 \\ x+7 + \frac{y-6}{4} = \frac{7,5}{2} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2y-21}{2} + 1 \\ \frac{x+2}{3} + 3 = \frac{3-y}{5} - \frac{10}{3} \end{cases}$$

33 *Autre histoire d'âge*

Farid dit à Yasmina : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. ». Yasmina dit à Farid : « Quand j'aurai ton âge, nous aurons 42 ans à nous deux. ». Détermine l'âge de Farid et celui de Yasmina.

34 *Cinq fruits et légumes par jour*

Il est recommandé de consommer 110 mg de vitamine C par jour. La maman de Julien achète du jus d'orange qui contient 52 mg de vitamine C pour 100 mL et du jus de pomme qui en contient 12 mg pour 100 mL.



Source Wikipédia. Domaine public.

Pour suivre les recommandations tout en variant sa consommation de fruits, Julien souhaite boire un peu des deux dans un verre de 250 mL le matin au petit déjeuner. Quelle quantité de chaque jus devra-t-il mélanger pour bénéficier de son apport quotidien en vitamine C avec un seul verre ?

35 *Alliage*

Un objet composé d'un alliage d'or et de cuivre, pèse 1 875 g pour un volume de 143 cm³. 1 cm³ d'or pèse 19,5 g et 1 cm³ de cuivre pèse 9 g. Calcule le volume d'or et le volume de cuivre de cet objet.

36 *Au laboratoire*

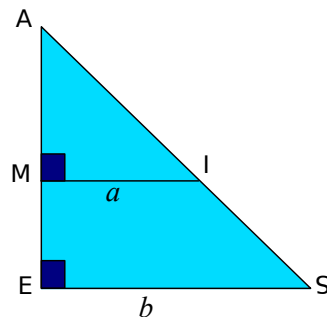
Un laboratoire dispose de deux solutions de chlorure de sodium, de concentration respective 20 g·L⁻¹ et 50 g·L⁻¹.

Quelle quantité de chaque solution doit-on mélanger pour obtenir 10 L d'une solution de concentration 32 g·L⁻¹ ?

37 *Gourmandise*

Leïla dispose de deux tablettes de chocolat. L'une contient 60 % de cacao et l'autre 92 % de cacao. Quelle masse de chaque tablette doit-elle mélanger pour obtenir un mélange de 400 g dont la teneur en cacao est de 72 % ?

38 Sur la figure ci-dessous, AM = 7 cm et AE = 9 cm.



- a. Que peux-tu dire de (MI) et (SE) ? Justifie.
- b. En utilisant le théorème de Thalès, établis une égalité reliant a et b .
- c. Sachant que l'aire du trapèze MISE est égale à 20 cm², écris une deuxième égalité liant a et b .
- d. Détermine les longueurs MI et SE.

39 *Choix des inconnues*

Pendant les soldes, un vendeur de vêtements a vendu 86 costumes au prix normal et 11 costumes à prix réduit. Il réalise 1 045,30 € de bénéfice.

Au même moment, son collègue a vendu 78 costumes au prix normal et neuf costumes à prix réduit. Il a fait un bénéfice de 950,70 €.

Chaque vendeur propose le même prix normal, le même prix réduit et réalise le même bénéfice sur chaque costume vendu.

- a. Quel est le bénéfice réalisé par les vendeurs sur un costume vendu au prix normal ?
- b. Le prix réduit est-il un gain ou une perte pour ces vendeurs ?

Exercices d'approfondissement

40 En semaine, un zoo propose deux tarifs : un tarif adulte et un tarif enfant. Le dimanche, le tarif adulte est le même qu'en semaine alors que le tarif enfant est réduit de 20 %.

Lundi, le zoo reçoit 150 adultes et 210 enfants. La recette des entrées est de 3 270 €.

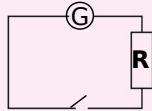
Dimanche, le zoo reçoit 1 070 visiteurs dont 350 adultes. La recette est de 8 232 €.

a. Quel est le tarif adulte ? Quel est le tarif enfant en semaine ?

b. Quel est le tarif réduit pour les enfants le dimanche ?

41 Loi d'Ohm

La tension U aux bornes d'un conducteur ohmique est égale au produit de sa résistance R par l'intensité I du courant qui la traverse :



$$U = R \times I$$

(U en volt V, R en ohm Ω et I en ampère A).

Un premier circuit électrique est composé d'un générateur, d'une lampe de résistance 500Ω et d'un interrupteur.

Un second circuit est composé du même générateur, d'une lampe de résistance 80Ω et d'un interrupteur.

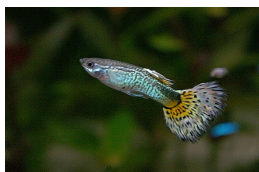
En utilisant un ampèremètre, on vérifie que la somme des intensités des deux circuits est de $0,174 \text{ A}$.

a. Détermine l'intensité dans le premier circuit et dans le deuxième circuit.

b. Quelle est la tension délivrée par le générateur ?

42 Chloé souhaite installer un aquarium de 80 L dans sa chambre.

Pour déterminer le nombre de poissons à mettre dans l'aquarium, une règle empirique préconise 1 L d'eau pour chaque « centimètre » de poissons.



Chloé souhaite mettre des néons (taille adulte : 4 cm) et des guppys (taille adulte : 6 cm pour la femelle et 4 cm pour le mâle).

L'animalerie propose le couple de guppys à $2,30 \text{ €}$ et le lot de cinq néons à $1,50 \text{ €}$.

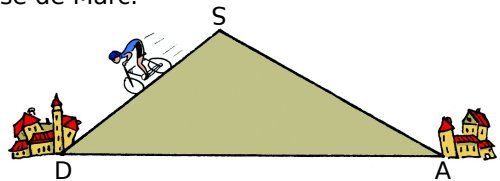
Chloé a $9,10 \text{ €}$ dans sa tirelire.

Combien de poissons de chaque sorte pourra-t-elle mettre dans son aquarium ?

43 Marc doit franchir une colline en vélo.

Pour aller d'un village D vers un village A, en passant par le sommet S, il met $25 \text{ min } 30 \text{ s}$.

Pierre, quant à lui, met $40 \text{ min } 30 \text{ s}$ pour réaliser le même parcours en vélo mais en sens inverse de Marc.



Sachant que les deux cyclistes roulent à $15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans la montée, et $40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans la descente, calcule DS et SA.

(On supposera que la pente est identique avant et après le sommet.)

44 Séisme au collège

Lors d'un séisme, deux types d'ondes sismiques se succèdent : les ondes primaires longitudinales se propagent à la vitesse de 6 km/s et les ondes secondaires transversales se propagent à 4 km/s . Elles provoquent deux secousses.

Lors du tremblement de terre de Lambesc du 11 juin 1909, l'intervalle de temps entre les deux secousses a été de 1 s . À quelle profondeur se trouvait le foyer du séisme ?



À Lambesc se trouve le seul collège de France métropolitaine construit aux normes para-sismiques : il repose sur des piliers dont la base est recouverte de caoutchouc pour amortir les secousses.

45 Soit le système de trois équations à trois inconnues suivant.

$$\begin{cases} x + y = 59 \\ x + z = 75 \\ y + z = 32 \end{cases}$$

a. Exprime y en fonction de x dans la première équation.

b. Exprime z en fonction de x dans la deuxième équation.

c. Dans la troisième équation, remplace y et z par les expressions trouvées dans les questions a. et b..

d. Résous l'équation trouvée.

e. Déduis-en y et z puis la solution du système.

Étude « théorique » d'un système

1^{re} Partie : Les bonnes formules

On considère un système de deux équations à deux inconnues x et y de façon théorique. Ici, les coefficients qui composent le système sont aussi inconnus et non nuls. On les remplace par

$$\text{les lettres } a, b, c, d, e \text{ et } f: \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

a. Dans le groupe, composez deux équipes.

La première équipe doit déterminer par quels nombres il faut multiplier les équations pour éliminer x .

La deuxième équipe doit déterminer par quels nombres il faut multiplier les équations pour éliminer y .

Les deux équipes mettent en commun leurs travaux et vérifient leurs réponses.

b. En utilisant les résultats trouvés dans la question **a.**, déterminez une « formule » permettant d'exprimer x à l'aide des coefficients a, b, c, d, e et f .

c. Déterminez de même une « formule » permettant d'exprimer y à l'aide des coefficients a, b, c, d, e et f .

2^e Partie : Test des formules sur un exemple

$$\text{Soit le système } \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

d. Résolvez le système précédent en utilisant la méthode de votre choix. Comparez vos résultats.

e. En remplaçant les coefficients a, b, c, d, e et f par les nombres qui conviennent dans les « formules » trouvées dans la **1^{re} Partie**, vérifiez que vous obtenez les bonnes valeurs pour x et pour y (Si ce n'est pas le cas, il faut revoir les « formules » de la **1^{re} Partie**).

3^e Partie : Cas particuliers

f. Les opérations faites pour déterminer x et y avec les « formules » sont-elles toujours possibles ? Sinon, dans quel(s) cas y a-t-il un problème ?

g. Déterminez deux systèmes vérifiant l'un de ces cas : le premier avec $c = f$ et le second avec $c \neq f$.

h. Chaque membre du groupe résout les deux systèmes en utilisant la méthode de son choix.

i. Que constatez-vous pour chacun des cas ?

4^e Partie : Avec un tableur

Vous allez programmer une feuille de calcul permettant de déterminer les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, en vous aidant des résultats précédents.

a. Dans un tableur, programmez une feuille de calcul comme celle ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	x	+	b	y	=	c
2	d	x	+	e	y	=	f
3							
4	$x =$						
5	$y =$						

b. Quelle formule devez-vous inscrire dans la cellule **B4** si vous voulez y faire apparaître la valeur de x ? Programmez cette formule.

c. Quelle formule devez-vous inscrire dans la cellule **B5** si vous voulez y faire apparaître la valeur de y ? Programmez cette formule.

Il faut maintenant tester si les formules que vous avez programmées sont bonnes. Pour cela, on utilise le système que vous avez résolu dans la question **d.**

d. Dans la feuille de calcul, remplacez chaque coefficient par les nombres qui conviennent. Les résultats obtenus correspondent-ils à ceux que vous avez trouvés à la question **d.** ?

e. Testez un système de votre composition.

f. Échangez ensuite ce système avec celui d'un autre groupe afin de vérifier que votre feuille de calcul donne le bon résultat.

g. Que se passe-t-il lorsque vous utilisez votre feuille de calcul avec les systèmes trouvés dans la question **g.** ?

h. En utilisant votre feuille de calcul, résolvez le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 6x - 9y = -5 \end{cases}$$

i. Que remarquez-vous ?

j. Chaque membre du groupe résout le système de la question **o.** avec la méthode de son choix.

k. Vérifiez vos résultats afin de déterminer la solution du système.

l. Quelle limite pouvez-vous établir à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues à l'aide d'un tableur ?

		R1	R2	R3	R4
1	Le couple $(3 ; -3)$ est solution de...	$3x - 3y = 0$	$3x + 3y = 0$	$4x - 3y = 21$	$3x + 3y = 0$ et de $4x - 3y = 21$
2	$4x - y = 21$ donc...	$x = 21 + y - 4$	$y = 21 - 4x$	$x = \frac{21 + y}{4}$	$y = -21 + 4x$
3	On considère l'équation $4x - 3y = 21$.	Si $x = 3$ alors $y = 3$	Si $y = -3$ alors $x = 3$	$x = 3$ et $y = -3$	Il y a une infinité de solutions
4	Soit \mathcal{S} le système $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ -2x + y = -10 \end{cases}$	\mathcal{S} est un système de deux équations à trois inconnues	Le couple $(x ; y)$ est une solution du système s'il vérifie une des deux égalités	Résoudre \mathcal{S} , c'est trouver une valeur de x et une valeur de y qui vérifient les deux équations simultanément	L'accolade du système \mathcal{S} ne sert à rien
5	Le système \mathcal{S} a la même solution que...	$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ -9x = 20 \end{cases}$	$5x + 2y = 7$
6	Le système \mathcal{S} ...	admet pour solution $(1 ; 1)$	n'a pas de solution	admet pour solutions $x = 3$ et $y = -4$	admet une infinité de solutions
7	Le système $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$	admet pour solutions 0 et -2	n'admet aucune solution	a pour solution $(0 ; -2)$	admet une infinité de solutions
8	Pour 24 équerres et 12 compas, on paie 60 € et pour deux compas et deux équerres, on paie 7 €. Quel(s) système(s) peut (peuvent) traduire cet énoncé ?	$\begin{cases} 24x + 12y = 60 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2a + 2b = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 12u + 24v = 60 \\ 2u + 2v = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} u = 1,5 \\ v = 2 \end{cases}$
9	On a garé des voitures et des deux-roues. Au total, il y a 52 roues et 16 véhicules. Combien y a-t-il de voitures ?	treize voitures	dix voitures	aucune voiture	six voitures



Récréation mathématique

Jacques Peletier est un écrivain célèbre du XVI^e siècle qui écrit le premier livre d'algèbre en langue française. Voici un exercice de son livre, en vieux Français.

7 aunes de velours cramoifi et 3 aunes de velours noir, fe vendent 58 efcus &, au mefme prix 2 aunes de velours cramoifi & 4 de velours noir valent 26 efcus. Combien vaut l'aune de velours cramoifi ?

Sachant qu'une aune mesure environ 1,20 m, calcule la longueur de drap achetée par ce marchand.