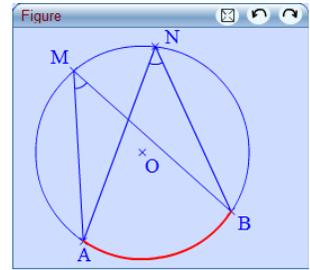


## Activité 1 Des angles dans un cercle

### 1. Conjecture avec TracenPoche

Construis un cercle de centre  $O$  et de rayon 5 unités en utilisant le bouton . À l'aide du bouton , place quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $M$  et  $N$  sur le cercle. Marque les angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  (utilise ).



- Les angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  sont appelés **angles inscrits** dans le cercle. Quel te semble être le sens de cette appellation ?
- Mesure les angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  en utilisant le bouton . Compare les mesures des angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  pour différentes positions de  $M$ .
- Comment caractériserais-tu les positions de  $M$  lorsque les angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  ont la même mesure ?
- Que faut-il faire pour changer la mesure de l'angle  $\widehat{ANB}$  ?

### 2. Angle au centre avec TracenPoche

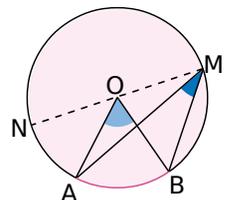
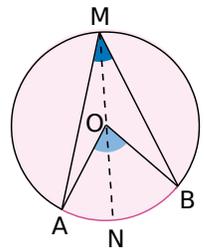
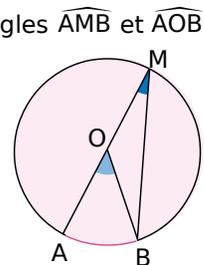
Construis l'angle au centre  $\widehat{AOB}$ .

- Pourquoi l'angle  $\widehat{AOB}$  est-il appelé angle au centre du cercle ?
- Quel est l'arc de cercle intercepté par l'angle  $\widehat{AOB}$  ?
- Fais apparaître la mesure de l'angle  $\widehat{AOB}$ . Quelle relation semble-t-il y avoir entre les mesures de  $\widehat{AOB}$  et  $\widehat{AMB}$  lorsque ces deux angles interceptent le même arc de cercle ?

### 3. Démonstration

$A$ ,  $B$  et  $M$  sont trois points du cercle de centre  $O$  de telle sorte que les angles  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{AOB}$  interceptent l'arc de cercle  $\widehat{AB}$ . Montrons que  $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$ .

- Premier cas** :  $[AM]$  est un diamètre du cercle. On désigne par  $x$  la mesure en degrés de l'angle  $\widehat{AMB}$ .
  - Quelle est la nature du triangle  $OMB$  ? Justifie ta réponse.
  - Exprime les mesures des angles du triangle  $OMB$  en fonction de  $x$ .
  - Déduis-en la mesure de l'angle  $\widehat{AOB}$ .
- Deuxième cas** : Le point  $O$  appartient au secteur angulaire  $\widehat{AMB}$ . On appelle  $N$  le point du cercle de sorte que  $[MN]$  soit un diamètre.
  - Que dire des angles  $\widehat{AMN}$  et  $\widehat{AON}$  ?
  - Que dire des angles  $\widehat{NMB}$  et  $\widehat{NOB}$  ?
  - Montre alors que, dans ce cas, la propriété est vérifiée.
- Troisième cas** : Le point  $O$  n'appartient pas au secteur angulaire  $\widehat{AMB}$ . En considérant le diamètre  $[MN]$ , montre comme au deuxième cas que  $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$ .



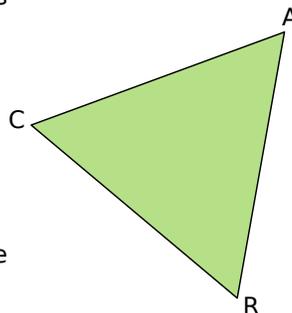
## Activité 2 : Polygones réguliers

### 1. Les polygones

- Recherche le nom des polygones qui ont entre 3 et 12 côtés.
- Recherche les particularités que possèdent les polygones réguliers.

### 2. Les triangles

- Parmi les triangles, lesquels sont des polygones réguliers ?
- Construis un tel triangle CAR de côté 5 cm. On appelle O le centre de son cercle circonscrit.
- Que représentent les droites (AO), (RO) et (CO) pour ce triangle ?
- Détermine la mesure des angles  $\widehat{COA}$ ,  $\widehat{AOR}$  et  $\widehat{ROC}$ .
- Construis un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 6 cm.

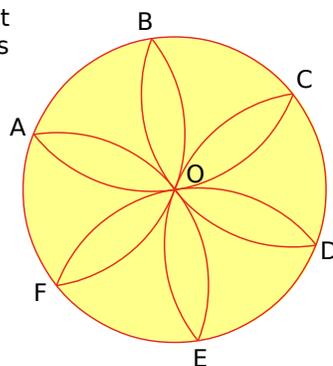


### 3. Les quadrilatères

- Parmi les quadrilatères, lesquels sont des polygones réguliers ?
- Construis un tel quadrilatère DIME de côté 5 cm. On appelle O le centre de son cercle circonscrit.
- Détermine la mesure des angles  $\widehat{DOI}$ ,  $\widehat{IOM}$ ,  $\widehat{MOE}$  et  $\widehat{EOD}$ .
- Construis un carré inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

### 4. Une rosace

- Construis un cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm et la rosace inscrite dans ce cercle dont les sommets s'appellent A, B, C, D, E et F.
- Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
- Quelle est la nature des triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF et AOF ? Justifie ta réponse.
- Montre que les angles de ce polygone ont la même mesure.
- Quelles sont les mesures des angles au centre  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{COD}$ ,  $\widehat{DOE}$ ,  $\widehat{EOF}$  et  $\widehat{FOA}$  ?
- Propose une méthode de construction de ce polygone en utilisant le rapporteur.



### 5. Polygone régulier à n côtés

- En t'aidant des réponses aux questions précédentes, détermine la mesure d'un angle au centre déterminé par deux sommets consécutifs d'un polygone régulier à  $n$  côtés.
- Propose une méthode de construction d'un polygone régulier à  $n$  côtés.
- Construis un polygone régulier à huit côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 5 cm.
- Calcule la mesure de l'angle formé par deux côtés consécutifs de cet octogone.

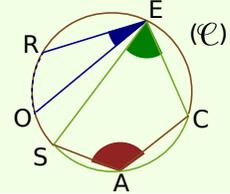
## Méthode 1 : Utiliser les angles inscrits dans un cercle

### À connaître

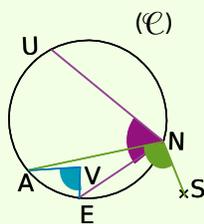
Un **angle inscrit dans un cercle** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en des points distincts du sommet. La portion de cercle comprise entre les deux côtés de l'angle s'appelle l'**arc de cercle intercepté**.

**Exemple 1 :** Donne le nom des arcs de cercle interceptés par les angles inscrits dans le cercle ci-dessous.

L'angle inscrit  $\widehat{REO}$  intercepte le petit arc de cercle  $\widehat{RO}$ .  
 L'angle inscrit  $\widehat{SEC}$  intercepte le petit arc de cercle  $\widehat{SC}$ .  
 L'angle inscrit  $\widehat{SAC}$  intercepte le grand arc de cercle  $\widehat{SC}$ .



**Exemple 2 :** Les angles  $\widehat{UNE}$  ;  $\widehat{AVE}$  et  $\widehat{ANS}$  sont-ils des angles inscrits dans le cercle  $(\mathcal{C})$  ?  
 Si oui, donne le nom de l'arc intercepté.

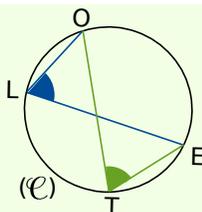


- Le sommet de l'angle  $\widehat{UNE}$  appartient au cercle et ses côtés recoupent le cercle en U et E : l'angle  $\widehat{UNE}$  est un angle inscrit dans le cercle  $(\mathcal{C})$ . Il intercepte l'arc  $\widehat{UE}$ .
- Le sommet de l'angle  $\widehat{AVE}$  n'est pas un point du cercle : l'angle  $\widehat{AVE}$  n'est pas un angle inscrit dans le cercle  $(\mathcal{C})$ .
- Le côté  $[NS]$  de l'angle  $\widehat{ANS}$  ne coupe le cercle qu'en N : l'angle  $\widehat{ANS}$  n'est pas un angle inscrit dans le cercle  $(\mathcal{C})$ .

### À connaître

Si deux angles sont **inscrits dans un même cercle** et s'ils **interceptent le même arc** alors ils ont la même mesure.

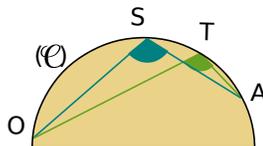
**Exemple 3 :** Sur la figure ci-dessous, l'angle  $\widehat{OTE}$  mesure  $67^\circ$ .  
 Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{OLE}$ .



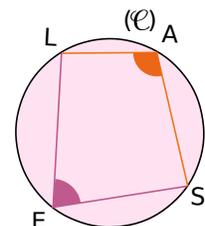
Les angles  $\widehat{OTE}$  et  $\widehat{OLE}$  sont inscrits dans le cercle  $(\mathcal{C})$ .  
 Ils interceptent tous les deux l'arc  $\widehat{OE}$ .  
 Donc ils ont la même mesure.  
 L'angle  $\widehat{OTE}$  mesure  $67^\circ$ .  
 Donc l'angle  $\widehat{OLE}$  mesure  $67^\circ$ .

### Exercices « À toi de jouer »

**1** Sur la figure ci-dessous, les angles  $\widehat{ASO}$  et  $\widehat{ATO}$  ont-ils la même mesure ?



**2** Sur la figure ci-contre, les angles  $\widehat{LAS}$  et  $\widehat{LES}$  ont-ils la même mesure ?



## Méthode 2 : Utiliser les angles au centre d'un cercle

### À connaître

Si un **angle inscrit** dans un cercle et un **angle au centre** (son sommet est le centre du cercle) interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

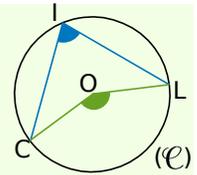
**Exemple :** La figure ci-dessous représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre O. L'angle  $\widehat{CIL}$  mesure  $76^\circ$ . Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{COL}$ .

Dans le cercle  $(\mathcal{C})$ , l'angle inscrit  $\widehat{CIL}$  et l'angle au centre  $\widehat{COL}$  interceptent le même arc  $\widehat{CL}$ .

Donc l'angle au centre  $\widehat{COL}$  mesure le double de l'angle inscrit  $\widehat{CIL}$ .

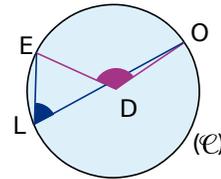
$$\widehat{COL} = 2 \times \widehat{CIL} = 2 \times 76^\circ = 152^\circ.$$

L'angle au centre  $\widehat{COL}$  mesure  $152^\circ$ .



### Exercice « À toi de jouer »

**3** La figure ci-contre représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre D. L'angle  $\widehat{ODE}$  mesure  $122^\circ$ . Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{OLE}$ .



## Méthode 3 : Construire un polygone régulier

### À connaître

Un **polygone** est **régulier** lorsque tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

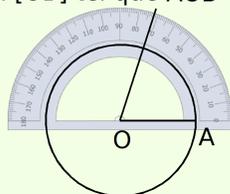
### À connaître

Un polygone régulier à  $n$  côtés est **inscriptible** dans un cercle. Tous les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone ont la même mesure.

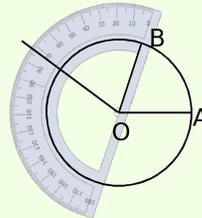
**Exemple :** Construis un cercle de centre O. Inscris un pentagone ABCDE dans ce cercle.

Un pentagone a cinq côtés. Les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone sont tous égaux à  $72^\circ$  ( $360 \div 5 = 72$ ).

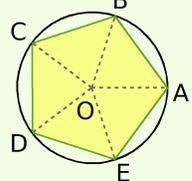
On construit le cercle et l'un de ses rayons [OA] et un autre rayon [OB] tel que  $\widehat{AOB} = 72^\circ$ .



On trace un autre rayon [OC] tel que  $\widehat{BOC} = 72^\circ$ .



Ainsi de suite jusqu'à obtenir le pentagone ABCDE.

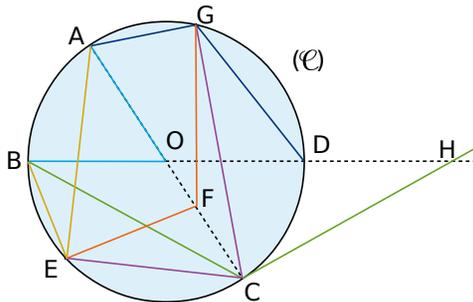


### Exercices « À toi de jouer »

- 4** Quel est le nom du triangle et du quadrilatère réguliers ?
- 5** Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Inscris-y un triangle équilatéral.

## Angles inscrits

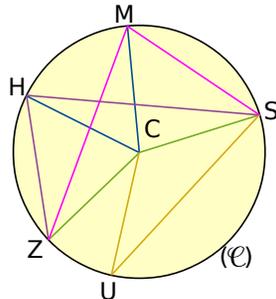
**1** La figure ci-dessous représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre O. Les points B, O, D et H sont alignés.



Les angles cités ci-après sont-ils des angles inscrits dans le cercle  $(\mathcal{C})$  ? Justifie chaque réponse.

- a.  $\widehat{BOA}$       c.  $\widehat{AGD}$       e.  $\widehat{GFE}$   
 b.  $\widehat{ECG}$       d.  $\widehat{BCH}$       f.  $\widehat{BEA}$

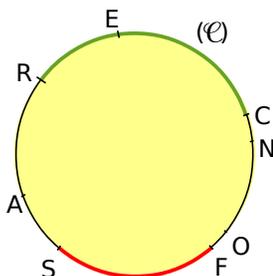
**2** La figure ci-contre représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre C.



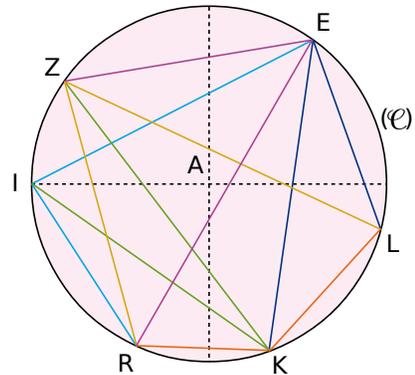
Les angles cités ci-après sont-ils des angles au centre dans ce cercle ?

- a.  $\widehat{SMZ}$       c.  $\widehat{MCH}$       e.  $\widehat{ZHS}$   
 b.  $\widehat{ZCS}$       d.  $\widehat{SUC}$       f.  $\widehat{HCU}$

**3** Reproduis la figure ci-dessous. Trace et cite tous les angles inscrits interceptant l'arc vert  $\widehat{RC}$  et tous les angles inscrits qui interceptent l'arc rouge  $\widehat{SF}$ .



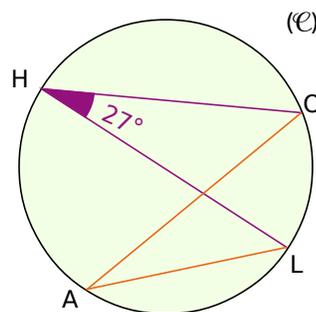
**4** La figure ci-dessous représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre A.



Pour chaque angle inscrit cité ci-après, indique l'angle au centre qui intercepte le même arc et précise le nom de l'arc.

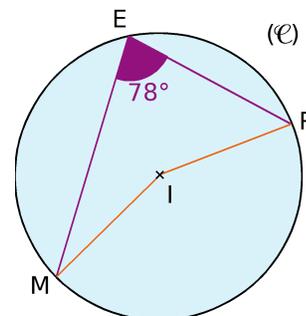
- a.  $\widehat{ZER}$       c.  $\widehat{KEL}$       e.  $\widehat{RIE}$   
 b.  $\widehat{RZL}$       d.  $\widehat{RKL}$       f.  $\widehat{IKZ}$

**5** La figure ci-dessous représente un cercle  $(\mathcal{C})$ .



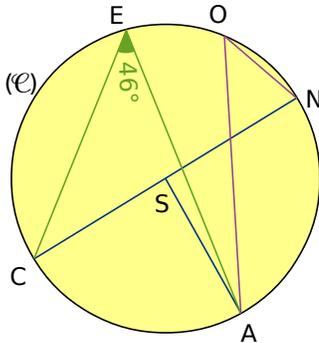
Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{LAO}$ . Justifie ta réponse.

**6** La figure ci-dessous représente un cercle de centre I.



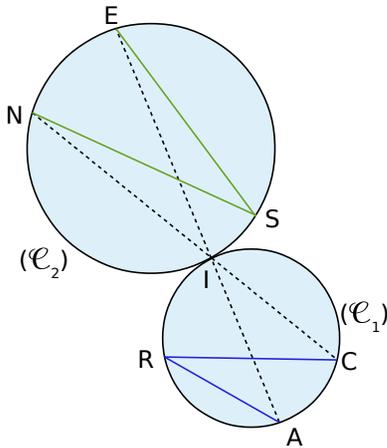
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle  $\widehat{MIR}$ .

**7** La figure ci-dessous représente un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre S.



Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle  $\widehat{NOA}$ .

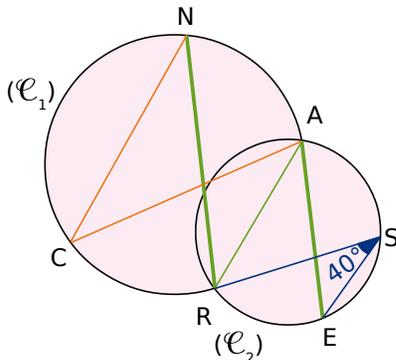
**8** Sur la figure ci-dessous, les droites (NC) et (AE) se coupent en I, point d'intersection des cercles  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .



Explique pourquoi  $\widehat{NSE} = \widehat{ARC}$ .

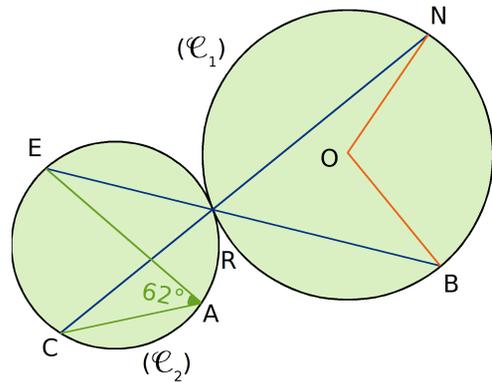
**9** Sur la figure ci-dessous, les droites (NR) et (AE) sont parallèles.

Les cercles  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  se coupent en R et A.



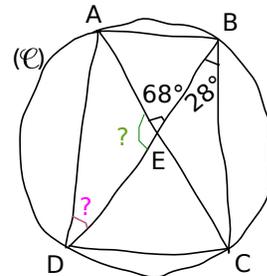
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle  $\widehat{NCA}$ .

**10** Sur la figure ci-dessous, les droites (EB) et (CN) se coupent en R, point d'intersection des cercles  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ . Le point O est le centre du cercle  $(\mathcal{C}_1)$ .



Calcule la mesure de l'angle  $\widehat{NOB}$ . Justifie ta démarche.

**11** Sur la figure à la main levée ci-dessous, les droites (AC) et (BD) se coupent en E.

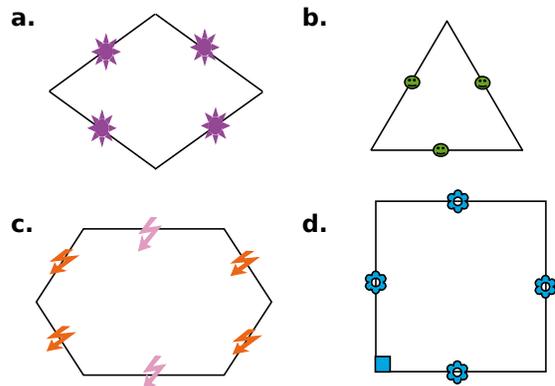


a. Calcule la mesure de l'angle  $\widehat{AED}$  puis celle de l'angle  $\widehat{ADB}$ . Justifie ta démarche.

b. Le point E est-il le centre du cercle ? Justifie.

## Polygones réguliers

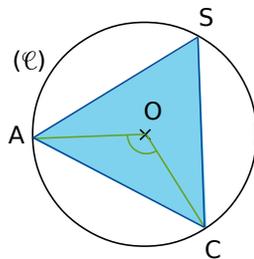
**12** Les polygones ci-dessous sont-ils réguliers ? Justifie tes réponses.



### 13 Dans le triangle équilatéral

Sur la figure ci-contre, le triangle SAC est un triangle équilatéral, inscrit dans un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre O.

Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{AOC}$  ? Justifie ta réponse.



### 14 À partir d'un hexagone

HEXAGO est un hexagone régulier inscrit dans un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre C.

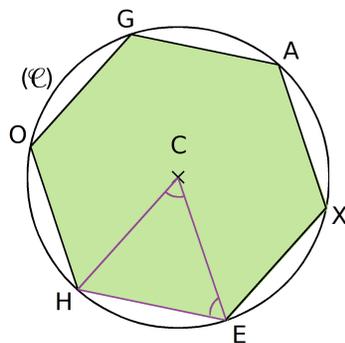
a. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{HCE}$  ? Justifie ta réponse.

b. Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{HEC}$ . Justifie.

c. Déduis-en la nature du triangle HCE.

d. Cela justifie une méthode de construction de l'hexagone déjà vue, laquelle ?

e. Exprime le périmètre de l'hexagone régulier en fonction du rayon  $r$  du cercle.



### 15 Un quadrilatère bien connu

Trace deux droites  $(d)$  et  $(d')$  perpendiculaires en A.

Trace le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

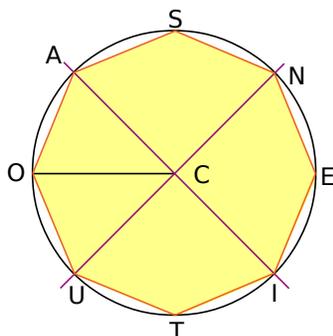
Il coupe  $(d)$  en B et C et  $(d')$  en D et E.

Explique pourquoi le quadrilatère BDCE est régulier.

16 La figure ci-dessous représente un octogone régulier AOUTIENS de centre C.

a. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{ACO}$  ? Justifie ta réponse.

b. Que peux-tu dire des droites (AC) et (CU) ? Justifie ta réponse.



17 PENTA est un pentagone régulier de centre O tel que  $OA = 4$  cm.

a. Calcule la mesure de l'angle  $\widehat{POE}$ .

b. Utilise cette mesure pour construire le pentagone à l'aide du rapporteur.

c. Quelle est la nature du triangle POE ?

d. Place  $O'$  le milieu du côté [PE]. Déduis-en la nature du triangle  $POO'$ .

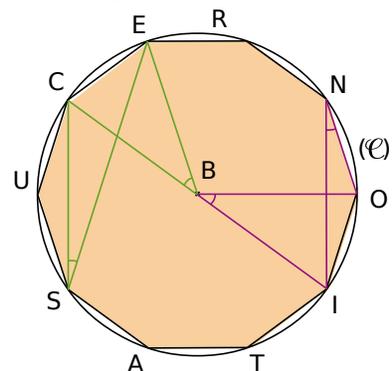
e. Détermine la mesure de chacun des angles du triangle  $POO'$ .

f. Calcule la longueur  $PO'$  et déduis-en la longueur PE. Tu donneras pour chacune la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

g. Détermine le périmètre du pentagone. Tu donneras la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

h. Détermine la longueur  $OO'$ . Déduis-en l'aire du triangle POE puis l'aire du pentagone. Tu donneras pour chacune la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

18 La figure ci-dessous représente un décagone régulier RECUSATION inscrit dans un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre B.



a. Quel est le nombre de côtés d'un décagone ?

b. Quelle est la mesure de l'angle au centre  $\widehat{CBE}$  ? Justifie.

c. Quelle est la mesure de l'angle au centre  $\widehat{OBI}$  ? Justifie.

d. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{CSE}$  ? Justifie.

e. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{ONI}$  ? Justifie.

f. Que remarques-tu ?

g. Que peux-tu en déduire au sujet de la réciproque de la propriété de deux angles inscrits qui interceptent le même arc de cercle ?



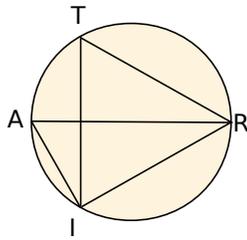
## Angles inscrits

### 19 Quelle nature ?

On a  $\widehat{ITR} = 50^\circ$  et  $\widehat{ARI} = 40^\circ$ .

a. Quelle est la nature du triangle AIR ? Justifie ta réponse.

b. Que dire du segment [AR] pour le cercle ?



### 20 Avec un diamètre

P et Q sont deux points d'un cercle de centre I et de diamètre [AB] tels que  $\widehat{AQP} = 35^\circ$ . On donne  $AB = 5$  cm.

a. Fais une figure.

b. Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{ABP}$ . Justifie.

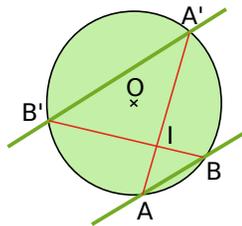
c. Quelle est la nature du triangle APB ?

d. Calcule la longueur du segment [AP] arrondie au millimètre.

e. Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{PIB}$ . Justifie.

### 21 Cercle et parallèles

Deux droites parallèles coupent un cercle de centre O respectivement en A et B et en A' et B'. On appelle I le point d'intersection des droites (AA') et (BB').



a. À l'aide de considérations sur les angles, démontre que le triangle ABI est isocèle.

b. Démontre que la droite (IO) est perpendiculaire à la droite (AB).

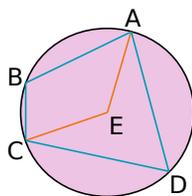
### 22 En face

Les points A, B, C et D sont disposés sur un cercle de centre E comme l'indique la figure ci-contre.

a. Démontre que : 
$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \frac{\widehat{AEC}}{2}$$

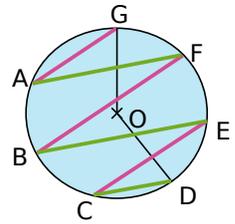
b. Que peut-on dire alors des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ADC}$  ?

c. Quelle propriété possèdent quatre points cocycliques ?



### 23 Cercle et parallèles (bis)

Les points A, B, C, D, E, F et G sont des points d'un cercle de centre O tels que les droites (AG), (BF) et (CE) sont parallèles entre elles et les droites (AF), (BE) et (CD) sont parallèles entre elles.



a. Sachant que  $\widehat{GAF} = 25^\circ$ , détermine la mesure de l'angle  $\widehat{GOD}$ .

b. Exprime, en général, la mesure de l'angle  $\widehat{GOD}$  en fonction de celle de l'angle  $\widehat{GAF}$ .

### 24 Avec deux cercles

(C) et (C') sont deux cercles de centre O et O', sécants en A et B. D est un point du cercle (C) distinct de A et B. La droite (DB) recoupe le cercle (C') en E.

a. Trace une figure, éventuellement avec un logiciel de géométrie dynamique.

b. Démontre que (OO') est la médiatrice du segment [AB]. Dédus-en que  $\widehat{AOO'} = \widehat{BOO'}$ .

c. Démontre que  $\widehat{ADE} = \widehat{AOO'}$ .

d. De même, montre que  $\widehat{DEA} = \widehat{AO'O}$ .

e. Dédus-en que  $\widehat{DAE} = \widehat{OAO'}$ .

f. Que peux-tu dire du triangle DAE dans le cas particulier où le point O est sur le cercle (C') et le point O' est sur le cercle (C) ? Justifie ta réponse.

### 25 Symétriques de l'orthocentre

Soit TRI un triangle et (C) son cercle circonscrit. On appelle J le point d'intersection de la hauteur issue de I et de (TR) et S le point d'intersection de la hauteur issue de R et de (TI). Soit H l'orthocentre du triangle TRI. La droite (RH) recoupe le cercle (C) en A.

a. Trace une figure, éventuellement avec un logiciel de géométrie dynamique.

b. Que peux-tu dire des angles  $\widehat{TRA}$  et  $\widehat{TIA}$  ?

c. En comparant les angles des triangles TRS et TIJ, démontre que  $\widehat{Tij} = \widehat{TRS}$ .

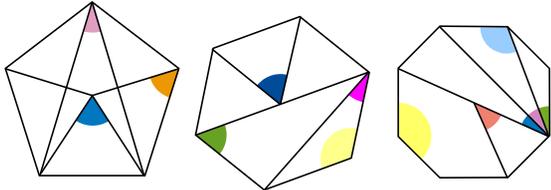
d. Dédus-en que A est le symétrique de H par rapport à la droite (TI).

e. En procédant de la même façon, que peut-on démontrer concernant les trois symétriques de l'orthocentre par rapport à chacun des côtés du triangle ?

## Polygones réguliers

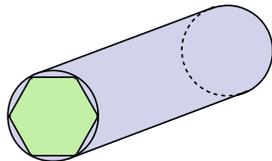
**26** Ils nous en font voir de toutes les couleurs

Les figures ci-dessous sont un pentagone, un hexagone et un octogone réguliers. Dans chaque cas, donne les mesures des angles en couleur.



**27** Usinage

On souhaite obtenir une pièce métallique ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier.



On dispose d'un cylindre de métal dont la section est un disque de 5 cm de diamètre. On appelle ABCDEF l'hexagone régulier inscrit dans ce disque et O son centre.

**a.** Représente le disque de base et l'hexagone ABCDEF en vraie grandeur.

**b.** Quelle est la nature du triangle ABO ? Calcule l'aire de ce triangle arrondie au  $\text{cm}^2$ . (Tu pourras appeler H le pied de la hauteur issue de O.) Déduis-en la valeur de l'aire de l'hexagone ABCDEF arrondie au  $\text{cm}^2$ .

**c.** La hauteur du cylindre est de 20 cm. Calcule le volume du cylindre, puis le volume de la pièce dont la base est l'hexagone ABCDEF, arrondis au  $\text{cm}^3$ . Quel pourcentage de métal, arrondi au dixième, est perdu lors de l'usinage ?

**28** Aire d'un octogone

Un octogone régulier ABCDEFGH inscrit dans un cercle de centre O a pour périmètre 24 cm. On appelle P le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

**a.** En considérant le triangle AOB, détermine la mesure exacte des angles  $\widehat{AOP}$  et  $\widehat{OAP}$ . Quelles sont les mesures des angles de l'octogone ABCDEFGH ?

**b.** Prouve que la longueur OP exprimée en cm vaut  $\frac{1,5}{\tan 22,5^\circ}$ .

**c.** Calcule la valeur exacte de l'aire de l'octogone ABCDEFGH puis arrondis au  $\text{cm}^2$ .

**29** Pavages du plan

On dit qu'un polygone permet de constituer un pavage du plan si on peut couvrir le plan complètement à l'aide de copies de ce polygone sans qu'il n'y ait de trou et sans que ces polygones ne se chevauchent.

**a.** Un carré permet-il de réaliser un pavage du plan ? Et un triangle équilatéral ?

**b.** On considère un hexagone régulier.

- Combien mesurent les angles d'un hexagone régulier ?
- Réalise un schéma qui montre qu'il est possible de paver le plan à l'aide d'hexagones réguliers identiques.
- Combien faudra-t-il en disposer autour d'un sommet du pavage ?

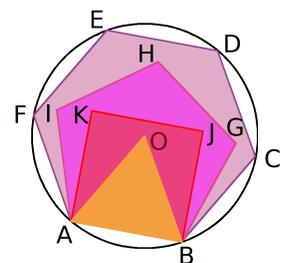
**c.** Explique alors pourquoi il n'est pas possible de constituer un pavage du plan à l'aide de pentagones réguliers.

**d.** On considère un polygone régulier à  $n$  côtés.

- Montre que la mesure en degrés de ses angles est  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ .
- Quelle condition la mesure des angles d'un polygone régulier doit-elle vérifier pour que l'on puisse réaliser un pavage du plan à l'aide de ce polygone ?
- Avec quels polygones réguliers est-il possible de paver le plan ?

**30** Tous ensemble

Dans la figure ci-contre, ABCDEF est un hexagone régulier, ABGHI est un pentagone régulier, ABJK est un carré et ABO un triangle équilatéral.



**a.** De quel polygone O est-il le centre ?

**b.** Calcule la mesure des angles  $\widehat{OBJ}$ ,  $\widehat{JBG}$  et  $\widehat{GBC}$ .

**c.** Réalise la figure avec  $AB = 6$  cm.

**d.** Calcule les valeurs exactes des aires du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone.

**e.** Calcule les pourcentages de remplissage arrondis au dixième :

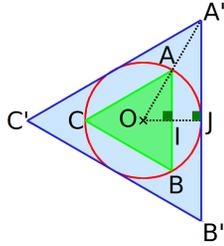
- du carré dans l'hexagone ;
- du triangle équilatéral dans le carré.



## 1 Approximation de $\pi$

### 1<sup>re</sup> Partie : Travail préliminaire

On considère un cercle de rayon 1 dm et de centre O, un triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle et un triangle équilatéral A'B'C' exinscrit, comme sur la figure ci-contre. Les points I et J sont les pieds des hauteurs issues de O respectivement dans les triangles OAB et OA'B'.



- Exprime, en décimètres, le périmètre du cercle en fonction de  $\pi$ .
- Calcule les mesures de  $\widehat{AOB}$  et  $\widehat{A'OB'}$ .
- Calcule les valeurs exactes de AI et A'J.
- Encadre le périmètre du cercle par les périmètres des triangles ABC et A'B'C' que tu auras préalablement calculés.
- Déduis-en un encadrement de la valeur du nombre  $\pi$ .

### 2<sup>e</sup> Partie : Travail en groupe

a. En reproduisant la procédure de la partie précédente, chaque groupe doit trouver de nouveaux encadrements de  $\pi$ .

Chaque élève du groupe devra pour cela encadrer le périmètre du cercle précédent par les périmètres de deux polygones réguliers de son choix.

b. Mettez en commun les résultats trouvés à l'aide d'un tableau. Quels sont les polygones qui donnent la meilleure approximation ?

### 3<sup>e</sup> Partie : Utilisation d'un tableur

c. On encadre maintenant le cercle initial par deux polygones réguliers à  $n$  sommets ABCD et A'B'C'D'. Calculez les mesures des angles  $\widehat{AOB}$  et  $\widehat{A'OB'}$  en fonction de  $n$ .

d. En s'inspirant de la méthode utilisée dans les parties précédentes, montrez que :

$$AB = 2 \times \sin\left(\frac{\widehat{AOB}}{2}\right) \text{ et } A'B' = 2 \times \tan\left(\frac{\widehat{AOB}}{2}\right).$$

e. Déduisez-en un encadrement de la valeur de  $\pi$ , en fonction de  $n$ .

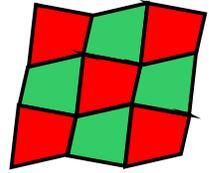
f. À l'aide d'un tableur, donnez une succession d'encadrements de  $\pi$  et une valeur approchée à  $10^{-5}$  près.

*Remarque : les tableurs utilisent des mesures d'angles en radians. Pour convertir la mesure d'un angle en radians, utiliser la fonction « RADIANS(...) » en indiquant dans la parenthèse la mesure en degrés.*

## 2 Pavages

### 1<sup>re</sup> Partie : Pavage simple

a. Chaque groupe dessine un quadrilatère quelconque convexe puis chaque élève du groupe le reproduit à l'identique et le colorie en rouge.



b. Chaque élève dessine ensuite l'image de ce quadrilatère par une symétrie de centre un des milieux des côtés du quadrilatère puis la colorie en vert.

c. Découpez puis agencez tous les quadrilatères ainsi construits de manière à paver une surface.

### 2<sup>e</sup> Partie : Pavage semi-régulier

d. Chaque élève du groupe construit au moins un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier et un octogone régulier, tous de côté 4 cm et les découpe.

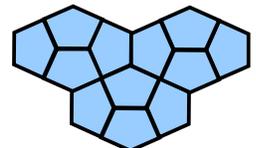
e. En mettant en commun tous les polygones construits par les élèves du groupe, recherchez tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire en n'utilisant qu'un seul type de polygone pour un même pavage.

f. Recherchez maintenant tous les pavages semi-réguliers possibles, c'est-à-dire en s'autorisant à utiliser plusieurs types de polygones réguliers pour un même pavage.

g. Recherchez sur internet le nombre de pavages semi-réguliers possibles.

### 3<sup>e</sup> Partie : Pavage du Caire

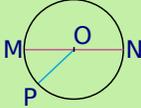
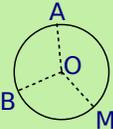
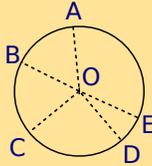
h. Chaque groupe construit un pentagone du Caire ABCDE en suivant le programme de tracé suivant.



- Tracer un segment [AB] de longueur 5 cm et sa médiatrice (uv) ;
- I étant le milieu de [AB], tracer les deux bissectrices des angles  $\widehat{AIu}$  et  $\widehat{BIu}$  ;
- le cercle de centre B passant par A coupe la bissectrice de l'angle  $\widehat{BIu}$  en C, et par symétrie, le cercle de centre A passant par B rencontre l'autre bissectrice en E ;
- la perpendiculaire en C à (BC) coupe la médiatrice en D.

i. Chaque élève reproduit le pentagone individuellement puis le colorie à sa guise.

f. Découpez et agencez tous les pentagones des élèves de la classe pour paver une surface.

		R1	R2	R3	R4
1	M, N et P sont sur le cercle de centre O. 	$\widehat{PMN}$	$\widehat{MOP}$	$\widehat{PMO}$	$\widehat{MPN}$
	Les angles inscrits sont...				
2	Dans la figure précédente, les angles au centre sont...	$\widehat{MOP}$	$\widehat{MON}$	$\widehat{MPO}$	$\widehat{PMO}$
3	A, B et M sont sur le cercle de centre O. 	$\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$	$2\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$	$\widehat{AMB} = 2\widehat{AOB}$	$\widehat{MOA} = \widehat{AOB}$
4	A, B, C, D et E sont sur le cercle de centre O. 	$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$	$\widehat{ADC} = 2\widehat{AOC}$	$\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$	$\widehat{ADC} = \widehat{AOC}$
5	Sur la figure précédente, les angles inscrits dans le cercle qui interceptent l'arc $\widehat{AC}$ sont...	$\widehat{AOC}$	$\widehat{ADC}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACE}$
6	[AB] est un côté d'un octogone régulier de centre O donc...	$\widehat{AOB} = 22,5^\circ$	$\widehat{AOB} = 60^\circ$	$\widehat{AOB} = 45^\circ$	OAB est isocèle en O
7	ABCDEF est un hexagone régulier de centre O donc...	$\widehat{EOC} = 60^\circ$	$\widehat{EOC} = 120^\circ$	$\widehat{EDC} = 60^\circ$	$\widehat{EDC} = 120^\circ$
8	ABCDEF est un hexagone régulier donc...	$\widehat{EFB} = 60^\circ$	$\widehat{EFB} = 90^\circ$	$\widehat{EFB} = 100^\circ$	$\widehat{EFB} = 120^\circ$

 Récréation mathématique

**Construction d'un pentagone régulier selon Dürer**

Albrecht Dürer a énoncé une construction approchée d'un pentagone régulier à l'aide de cinq cercles de même rayon.

**a. Construction à la règle non graduée et au compas**

- Trace un segment [AB]. Trace le cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre A passant par B et le cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre B passant par A. Ces deux cercles se coupent en F et G, trace le segment [FG].
- Trace le cercle de centre G passant par A, il recoupe ( $\mathcal{C}$ ) en I, ( $\mathcal{C}'$ ) en J et le segment [FG] en K. La droite (JK) coupe ( $\mathcal{C}$ ) en E à l'extérieur de ( $\mathcal{C}'$ ). La droite (IK) coupe ( $\mathcal{C}'$ ) en C à l'extérieur de ( $\mathcal{C}$ ).
- Trace le cercle de centre E passant par A et le cercle de centre C passant par B. Ils se coupent en D en dehors du quadrilatère ABCE. Trace en couleur le pentagone ABCDE. Semble-t-il régulier ? Justifie.

**b.** Réalise la construction précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie en faisant apparaître les mesures permettant de savoir si le pentagone ABCDE est régulier. Que penses-tu de la construction ?

**c.** Recherche qui était Albrecht Dürer.