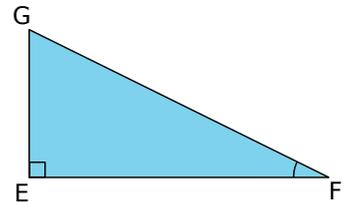


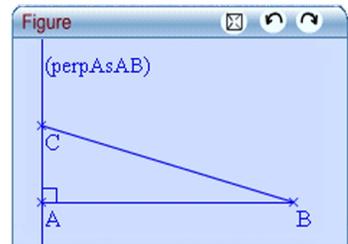
Activité 1 : Un angle aigu

- EFG est un triangle rectangle en E tel que $EG = 4$ cm et $EF = 7$ cm.
- Détermine la mesure de l'angle \widehat{EFG} arrondie au degré.



Activité 2 : Avec le logiciel TracenPoche

Construis un triangle ABC rectangle en A. Place sur le côté [AB] un point M à l'aide du bouton  et construis la perpendiculaire à (AB) passant par M. Nomme N le point d'intersection de cette droite avec le côté [BC].



1. Mesure l'angle \widehat{ABC} en utilisant le bouton  et les côtés [BM] et [BN] à l'aide du bouton .

a. Complète la fenêtre analyse comme ci-contre. Déplace le point M. Qu'en déduis-tu pour BM et BN ?



b. Que faut-il faire pour changer la valeur de $\frac{BM}{BN}$?

De quoi dépend-elle ?

Comment se nomme ce rapport vu en 4° ?

2. Fixe une mesure pour l'angle \widehat{ABC} puis recopie et complète le tableau suivant pour différentes positions de M sur [AB].

$\widehat{ABC} = \dots$	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
MN				
BN				
$\frac{MN}{BN}$				

a. Que peux-tu dire de ton tableau ? Compare ton résultat avec celui de tes camarades.

b. Calcule, dans la fenêtre analyse, le quotient $\frac{MN}{BN}$. Déplace le point M. Que remarques-tu ?

c. Que faut-il faire pour changer cette valeur ? De quoi dépend-elle ?

$\frac{MN}{BN}$ s'appelle le **sinus de l'angle** \widehat{ABC} . On note $\sin \widehat{ABC} = \frac{MN}{BN}$.

3. Fixe une mesure pour l'angle \widehat{ABC} puis recopie et complète le tableau suivant pour différentes positions de M sur [AB].

$\widehat{ABC} = \dots$	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
MN				
BM				
$\frac{MN}{BM}$				

a. Que peux-tu dire de ton tableau ? Compare ton résultat avec celui de tes camarades.

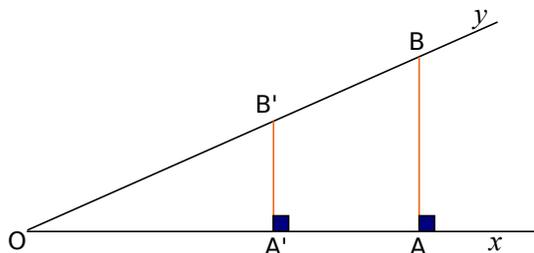
b. Calcule, dans la fenêtre analyse, le quotient $\frac{MN}{BM}$. Déplace le point M. Que remarques-tu ?

c. Que faut-il faire pour changer cette valeur ? De quoi dépend-elle ?

$\frac{MN}{BM}$ s'appelle la **tangente de l'angle** \widehat{ABC} et on note $\tan \widehat{ABC} = \frac{MN}{BM}$.

Activité 3 : Démonstration

- Sur la figure ci-contre, A et A' sont deux points de la demi-droite [Ox). Les perpendiculaires à [Ox) passant respectivement par A et A' coupent [Oy) en B et B'.



Démontrez que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$.

2. Cosinus et sinus d'un angle aigu

- Démontrez, à l'aide de l'égalité précédente, que $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$.
- Démontrez que $\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB}$.
- La valeur de ces quotients dépend-elle de la position de A' sur [Ox) ? Si non, de quoi dépend-elle ? Concluez.

3. Tangente d'un angle aigu

- Démontrez maintenant que $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}$.
- De quoi dépend cette valeur ? Concluez.

Activité 4 : Repérons-nous

1. Synthèse

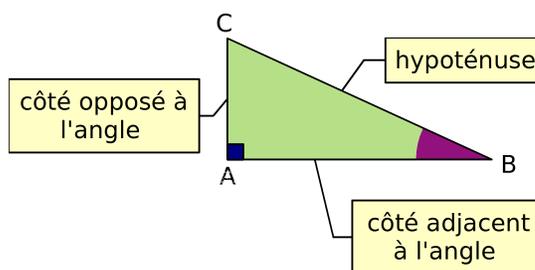
- Recopiez et complétez la phrase suivante.

Dans le triangle ... rectangle en ...,

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté} \dots \dots \text{à} \dots}{\dots}$$

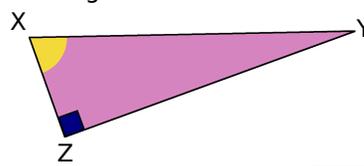
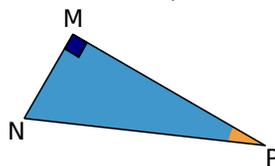
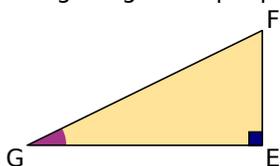
$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté} \dots \dots \text{à} \dots}{\dots}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté} \dots \dots \text{à} \dots}{\text{côté} \dots \dots \text{à} \dots}$$



- Reproduisez la figure ci-dessus et marquez l'angle \widehat{ACB} . Repérez alors le côté adjacent à l'angle \widehat{ACB} et le côté opposé à \widehat{ACB} .
- Exprimez le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle \widehat{ACB} .

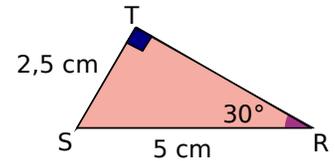
- Pour chaque triangle ci-dessous, repérez l'hypoténuse, le côté adjacent et le côté opposé de l'angle aigu marqué puis exprimez son cosinus, son sinus et sa tangente.



Activité 5 : À l'aide de la calculatrice

1. Calcul de la mesure d'un angle

a. Quelle est l'hypoténuse du triangle RST rectangle en T ? Que représente le côté [TS] pour l'angle donné ?



b. Écris l'égalité reliant l'angle $\widehat{\text{TRS}}$ et les longueurs SR et TS. Avec ta calculatrice, vérifie que l'unité de mesure d'angle est bien le degré puis calcule $\sin 30^\circ$. Compare avec le résultat trouvé à l'aide de SR et TS.

Retrouve la mesure de l'angle $\widehat{\text{TRS}}$ en utilisant les touches **SHIFT** **SIN⁻¹**.

2. Utilisation de la calculatrice

a. Recopie et complète le tableau suivant. Tu donneras les valeurs arrondies à 0,01 du cosinus, du sinus et de la tangente de l'angle aigu.

Angle x	15°	30°	45°	68°	75°	80°
$\cos x$						
$\sin x$						
$\tan x$						

b. Détermine la mesure de l'angle aigu x arrondie au degré sachant que :

- $\cos x = 0,54$
- $\sin x = 0,7$
- $\tan x = 0,9$
- $\tan x = 2,5$.

Activité 6 : Formules de trigonométrie

1. Recopie et complète le tableau suivant.

Angle x	$\cos x$	$\sin x$	$(\cos x)^2$	$(\sin x)^2$	$(\cos x)^2 + (\sin x)^2$
20°					
35°					
57°					

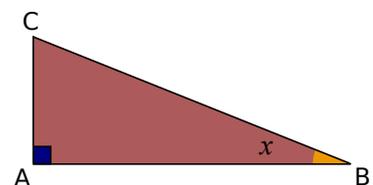
Que remarques-tu ?

2. Une preuve

a. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprime AB et AC en fonction de x et de BC.

b. Prouve que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

c. Dédus-en la valeur de $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$.



3. Une autre formule

a. Exprime $\tan x$ dans le triangle ABC rectangle en A.

b. En remplaçant AB et AC par les expressions trouvées au 2. a., trouve l'expression de la tangente d'un angle aigu en fonction de son sinus et de son cosinus.

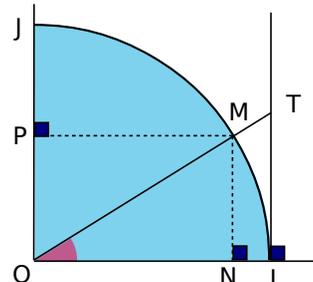
c. Sachant que $\cos x = 0,6$, détermine la valeur exacte de $\sin x$ puis celle de $\tan x$.

Activité 7 : Le quart de cercle trigonométrique

Sur une feuille de papier millimétré, reproduis la figure en prenant le décimètre comme unité pour OI . Tu placeras O en bas à gauche de ta feuille.

1. Coordonnées du point M

- Calcule $\cos \widehat{MOI}$ et $\sin \widehat{MOI}$.
- Déduis-en les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) en fonction de l'angle \widehat{MOI} .
- Exprime IT en fonction de l'angle \widehat{MOI} .

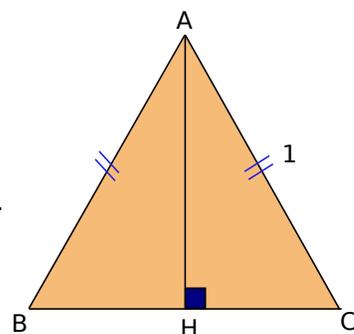


2. Applications

- Construis un angle $\widehat{M_1OI}$ mesurant 50° puis lis sur la figure des valeurs approchées à un centième près de $\sin 50^\circ$, de $\cos 50^\circ$ et de $\tan 50^\circ$.
- Construis un angle $\widehat{M_2OI}$ sachant que $\cos \widehat{M_2OI} = 0,4$. Détermine la valeur de $\sin \widehat{M_2OI}$ puis une mesure de l'angle $\widehat{M_2OI}$ à un degré près.
- On sait que $\sin x = 0,5$. À l'aide du graphique, détermine $\cos x$ à un centième près puis une mesure de x à un degré près.
- Peux-tu déterminer $\tan 75^\circ$ à l'aide du graphique ?

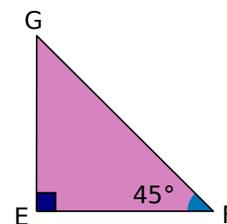
3. Premier cas particulier : un angle de 60°

- Quels polygones ont tous leurs angles égaux à 60° ?
- Considérons le triangle ABC équilatéral de côté 1 unité. Que peux-tu dire de H ? Justifie ta réponse. Déduis-en la longueur de $[BH]$.
- Calcule la longueur exacte de $[AH]$.
- Dans le triangle ABH rectangle en H , calcule les valeurs exactes de $\cos 60^\circ$, de $\sin 60^\circ$ et de $\tan 60^\circ$.
- Sur la figure du **2.**, lis des valeurs approchées de $\cos 60^\circ$, de $\sin 60^\circ$ et de $\tan 60^\circ$.
- À l'aide de ta calculatrice, compare ces valeurs avec les valeurs exactes du **d.**
- Quelles sont alors les valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle mesurant 30° ?



4. Deuxième cas particulier : un angle de 45°

- Le triangle EFG est rectangle en E et l'angle \widehat{EFG} mesure 45° . Précise la nature de ce triangle. Justifie.
- On pose $EF = 1$ unité. Calcule la valeur exacte de FG .
- Calcule les valeurs exactes de $\cos 45^\circ$, de $\sin 45^\circ$ et de $\tan 45^\circ$.
- Sur la figure du **2.**, construis un angle de 45° et lis des valeurs approchées de $\cos 45^\circ$, $\sin 45^\circ$ et $\tan 45^\circ$.
- À l'aide de ta calculatrice, compare ces valeurs avec les valeurs exactes du **c.**



Méthode 1 : Écrire les relations liant angles et longueurs

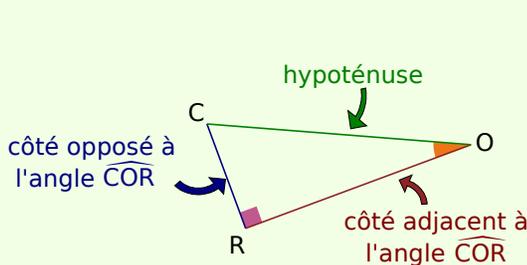
À connaître

Dans un **triangle rectangle**,

- le **cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- le **sinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- la **tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Remarques : Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1. La tangente d'un angle aigu est un nombre supérieur à 0.

Exemple : Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le cosinus et le sinus de l'angle \widehat{COR} puis la formule donnant la tangente de l'angle \widehat{RCO} .



Le triangle COR est rectangle en R donc

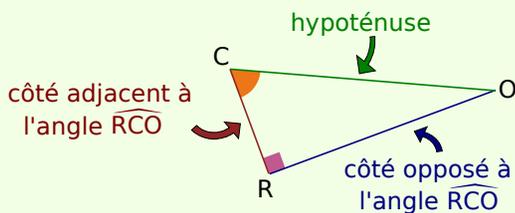
$$\cos \widehat{COR} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{COR} = \frac{RO}{CO}$$

et

$$\sin \widehat{COR} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{COR} = \frac{RC}{CO}$$



Le triangle COR est rectangle en R donc

$$\tan \widehat{RCO} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{RCO}}{\text{côté adjacent à } \widehat{RCO}}$$

$$\tan \widehat{RCO} = \frac{RC}{RO}$$

Exercices « À toi de jouer »

1 ENT est un triangle rectangle en E. Écris les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{TNE}$, $\sin \widehat{TNE}$ et $\tan \widehat{TNE}$.

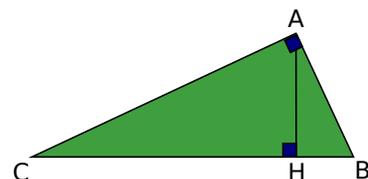
2 NOE est un triangle rectangle en O. Pour chacun des rapports suivants, précise s'il s'agit du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un des angles aigus du triangle NOE :

$\frac{NO}{NE}$; $\frac{OE}{ON}$; $\frac{EO}{EN}$ et $\frac{ON}{OE}$. Tu préciseras lequel.

3 Sur la figure ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC rectangle en A.

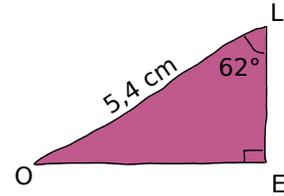
a. Écris de deux façons différentes les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{ACB}$, $\sin \widehat{ACB}$ et $\tan \widehat{ACB}$.

b. Recommence avec l'angle \widehat{ABC} .



Méthode 2 : Calculer des longueurs

Exemple 1 : On considère un triangle LEO rectangle en E tel que $LO = 5,4$ cm et $\widehat{ELO} = 62^\circ$.
Calcule la longueur du côté [EL] arrondie au millimètre.



Dans le triangle LEO rectangle en E,
[LO] est l'**hypoténuse** ;
[EL] est le **côté adjacent à l'angle \widehat{ELO}** .
On doit utiliser le cosinus de l'angle \widehat{ELO} .

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$$\cos \widehat{ELO} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$$

→ On écrit le cosinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$$\cos \widehat{ELO} = \frac{EL}{LO}$$

$$EL = LO \times \cos \widehat{ELO}$$

→ On applique la règle des produits en croix.

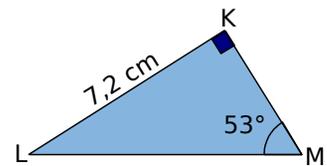
$$EL = 5,4 \times \cos 62^\circ$$

→ On saisit $5,4 \times \cos 62$.

$$EL \approx 2,5 \text{ cm.}$$

→ EL est inférieure à LO.
Le résultat est cohérent.

Exemple 2 : On considère KLM un triangle rectangle en K tel que $KL = 7,2$ cm et $\widehat{LMK} = 53^\circ$.
Calcule la longueur du côté [LM] arrondie au millimètre.



Dans le triangle KLM rectangle en K,
[LK] est le **côté opposé à l'angle \widehat{LMK}** ;
[LM] est l'**hypoténuse**.
On doit utiliser le sinus de l'angle \widehat{LMK} .

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$$

→ On écrit le sinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{KL}{LM}$$

$$LM = \frac{KL}{\sin \widehat{LMK}}$$

→ On applique la règle des produits en croix.

$$LM = \frac{7,2}{\sin 53^\circ}$$

→ On saisit $7,2 \div \sin 53$.

$$LM \approx 9 \text{ cm.}$$

→ LM est supérieure à KL.
Le résultat est cohérent.

Exercices « À toi de jouer »

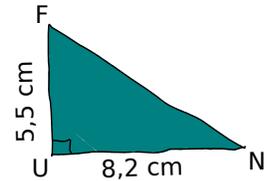
4 Le triangle NIV est rectangle en N ; $VN = 4$ m et l'angle \widehat{VIN} mesure 12° .
Calcule la longueur NI arrondie au centimètre.

5 Le triangle AUE est rectangle en U ; $AE = 10$ cm et $\widehat{EAU} = 19^\circ$.
Donne la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [UE].

6 Le triangle VLR est rectangle en V ; $LR = 8,7$ cm et $\widehat{VRL} = 72^\circ$.
Donne la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [VR].

Méthode 3 : Calculer la mesure d'un angle

Exemple : Soit FUN un triangle rectangle en U tel que $UN = 8,2$ cm et $UF = 5,5$ cm.
Calcule la mesure de l'angle \widehat{UNF} arrondie au degré.



Dans le triangle FUN rectangle en U,
[FU] est le **côté opposé** à l'angle \widehat{UNF} ;
[UN] est le **côté adjacent** à l'angle \widehat{UNF} .
On doit utiliser la tangente de l'angle \widehat{UNF} .

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$$

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{UF}{UN}$$

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{5,5}{8,2}$$

$$\widehat{UNF} \approx 34^\circ.$$

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

→ On écrit la tangente de l'angle recherché.

→ On saisit **2nde** ou **SIIIFT** puis **TAN⁻¹** (5,5 ÷ 8,2).

Exercices « À toi de jouer »

7 Le triangle EXO est rectangle en X tel que $EX = 3$ cm et $OE = 7$ cm.
Calcule les valeurs arrondies au degré de la mesure des angles \widehat{EOX} et \widehat{XEO} .

8 Le triangle JUS est rectangle en U. Calcule la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle \widehat{UJS} sachant que $UJ = 6,4$ cm et $US = 4,8$ cm.

Méthode 4 : Utiliser les formules de trigonométrie

À connaître

$$\text{Pour tout angle aigu } \hat{A}, (\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1 \text{ et } \tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}.$$

Remarque : La première formule peut aussi s'écrire $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$.

Exemple : Calcule la valeur exacte de $\sin \hat{A}$ et $\tan \hat{A}$ sachant que \hat{A} est un angle aigu tel que $\cos \hat{A} = 0,8$.

- $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$ donc $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36$.
Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin \hat{A} = \sqrt{0,36} = 0,6$.

- $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$.

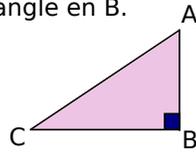
Exercice « À toi de jouer »

9 Calcule la valeur exacte de $\cos \hat{B}$ et $\tan \hat{B}$ sachant que \hat{B} est un angle aigu tel que $\sin \hat{B} = \frac{5}{13}$.



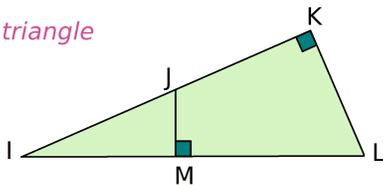
Vocabulaire

1 Soit ABC un triangle rectangle en B.



- Quelle est son hypoténuse ?
- Quel est le côté opposé à l'angle \widehat{ACB} ?
- Quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{ACB} ?
- Quel est le côté opposé à l'angle \widehat{CAB} ?
- Quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{CAB} ?

2 Le bon triangle



On se place dans le triangle IKL rectangle en K.

- Quelle est son hypoténuse ?
- Quel est le côté opposé à l'angle \widehat{KLI} ?
- Quel est le côté opposé à l'angle \widehat{KIL} ?

On se place dans le triangle IJM rectangle en M.

- Quelle est son hypoténuse ?
- Quel est le côté opposé à l'angle \widehat{JIM} ?

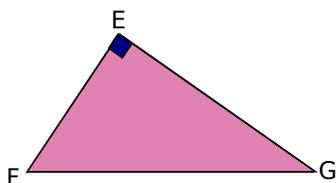
3 À toi de jouer !

a. Construis un triangle BON rectangle en O tel que $OB = 2,5$ cm et $ON = 4,5$ cm.

b. Repasse en rouge l'hypoténuse, en vert le côté opposé à l'angle \widehat{BNO} et en bleu le côté adjacent à l'angle \widehat{BNO} .

4 Écritures

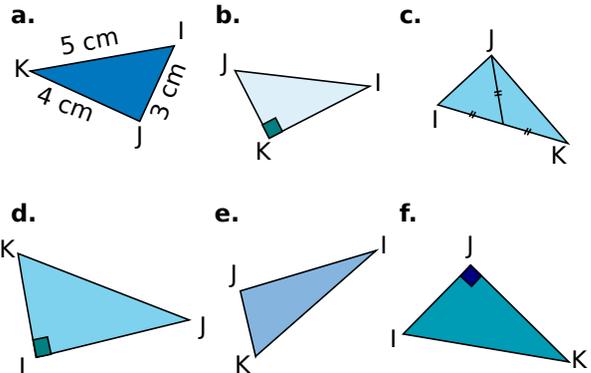
EFG est un triangle rectangle en E.



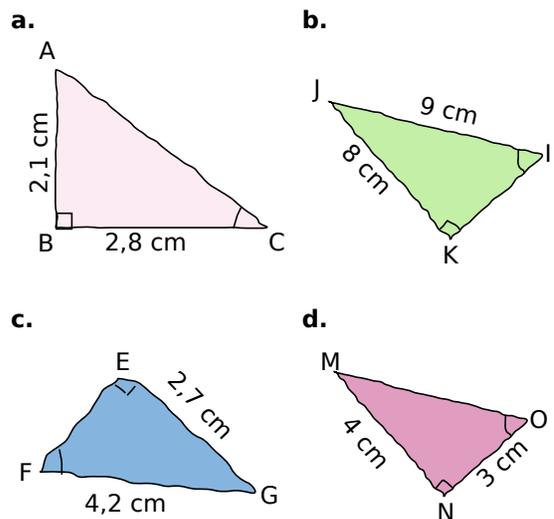
Écris les relations donnant le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle \widehat{EGF} dans le triangle EFG.

5 AMI est un triangle rectangle en I. Écris les relations donnant le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle \widehat{AMI} dans ce triangle.

6 Dans quel(s) triangle(s) peut-on écrire que $\sin \widehat{IKJ} = \frac{IJ}{IK}$? Justifie ta réponse.



7 Indique pour chaque figure à main levée si, à l'aide des données, on peut calculer le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle marqué.



8 Quels rapports ?

MOI est un triangle rectangle en O. Que calcules-tu lorsque tu écris :

- $\frac{OI}{MI}$?
- $\frac{OI}{MO}$?
- $\frac{MO}{OI}$?
- $\frac{MO}{MI}$?

Il peut y avoir plusieurs réponses possibles.

Précise l'angle pour chaque réponse donnée.

Avec la calculatrice

9 À l'aide de la calculatrice, donne la valeur arrondie au centième de :

a. $\sin 75^\circ$ b. $\cos 26^\circ$ c. $\tan 83^\circ$ d. $\sin 18^\circ$

10 Donne la valeur arrondie au degré de x .

a. $\sin x = 0,24$ b. $\tan x = 52$ c. $\cos x = 0,75$

d. $\tan x = \frac{7}{2}$ e. $\cos x = \frac{2}{3}$ f. $\sin x = \frac{9}{10}$

11 Recopie et complète le tableau suivant avec des arrondis au dixième.

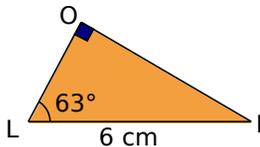
Mesure de l'angle	35°			89°	
Sinus		0,5	0,33		0,02

12 Calcule x dans chacun des cas suivants.

a. $\frac{x}{5,5} = 0,6$ b. $\frac{13}{x} = 0,25$ c. $0,8 = \frac{36}{x}$

Calculs de longueurs

13 Calcul de la longueur d'un côté



a. Exprime le cosinus de l'angle \widehat{OLI} en fonction des longueurs des côtés du triangle.

b. Quelle longueur peux-tu calculer à l'aide de ce cosinus ? Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

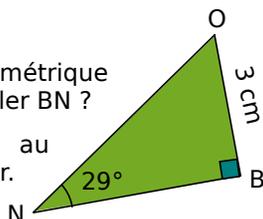
c. Exprime le sinus de l'angle \widehat{OLI} en fonction des longueurs des côtés du triangle.

d. Quelle longueur peux-tu calculer à l'aide de ce sinus ? Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

14 Que faut-il choisir ?

a. Quelle relation trigonométrique dois-tu utiliser pour calculer BN ?

b. Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

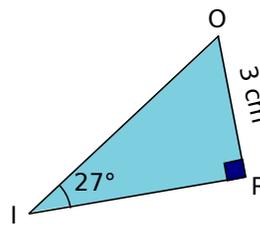


15 À toi de construire

a. Construis un triangle KOA rectangle en A tel que $AK = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{AKO} = 40^\circ$.

b. Calcule la longueur OA arrondie au mm.

16 Calcul de l'hypoténuse



a. Exprime le sinus de l'angle \widehat{RIO} en fonction des longueurs des côtés du triangle.

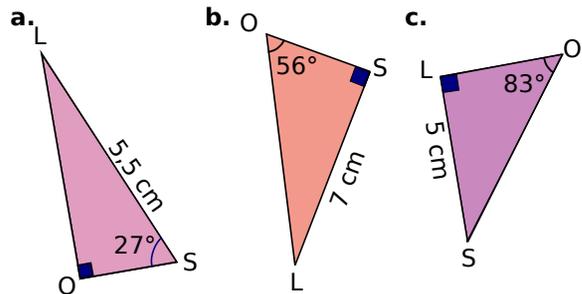
b. Dédus-en la valeur arrondie au dixième de l'hypoténuse du triangle RIO.

17 Construis un triangle TOY rectangle en O tel que $TO = 4,5 \text{ cm}$ et $\widehat{YTO} = 73^\circ$.

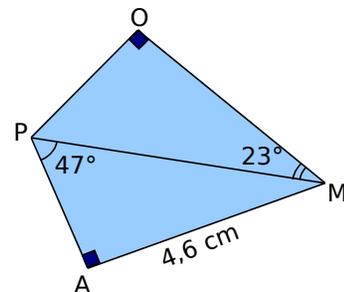
Calcule la valeur arrondie au dixième de l'hypoténuse de ce triangle.

18 À toi de choisir !

Dans chaque cas, calcule la valeur arrondie au dixième de la longueur SO.



19 Avec deux triangles

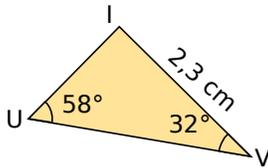


Calcule la longueur OM arrondie au millimètre.

20 RAT est un triangle rectangle en T tel que $\widehat{RAT} = 56^\circ$ et $RT = 2,7 \text{ cm}$. Calcule les arrondis au dixième des longueurs TA et RA.



21 Triangle rectangle ?



- Démontre que le triangle IUV est rectangle.
- Calcule les longueurs IU et UV arrondies au dixième.

22 Construis un triangle ABC tel que $AB = 4,5$ cm, $\widehat{BAC} = 27^\circ$ et $\widehat{CBA} = 63^\circ$.

- Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?
- Calcule les longueurs AC et BC arrondies au dixième.

23 Extrait du Brevet

- Effectuer avec soin les différentes constructions suivantes.

Tracer un demi-cercle (\mathcal{C}) de centre O et de diamètre [AB] sachant que $AB = 10$ cm.

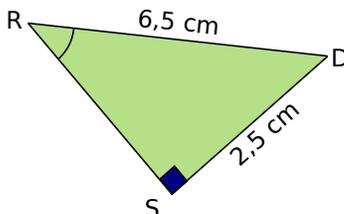
Placer sur (\mathcal{C}) un point C tel que l'angle \widehat{BAC} mesure 40° .

Tracer la tangente (d) à (\mathcal{C}) en B. Celle-ci coupe la droite (AC) au point D.

- Calculer au dixième de centimètre près les mesures des distances AC et CB, après avoir justifié la nature du triangle ABC.
- Indiquer les mesures exactes des angles \widehat{ADB} et \widehat{DBC} en justifiant vos réponses.
- Calculer au dixième de centimètre près les mesures des distances CD, BD et AD.

Calculs de mesures d'angles

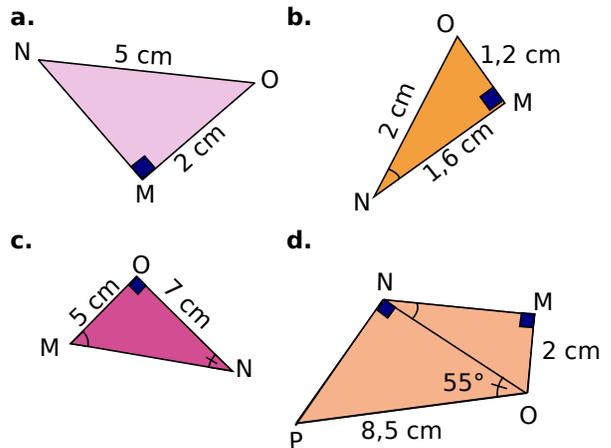
24 Soit RDS un triangle rectangle en S.



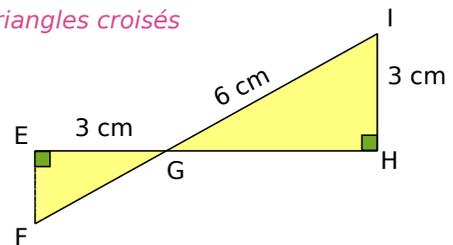
- Exprime le sinus de l'angle \widehat{DRS} en fonction des longueurs des côtés du triangle.
- Déduis-en la mesure arrondie au degré de l'angle \widehat{DRS} .

25 UVB est un triangle rectangle en B tel que $BV = 2$ cm et $UV = 3,5$ cm. Calcule la mesure arrondie au degré de chacun des angles de ce triangle.

26 Dans chaque cas, calcule la mesure de l'angle \widehat{MNO} ; donne la valeur arrondie au degré.



27 Triangles croisés



- Calcule la mesure de l'angle \widehat{IGH} .
- Déduis-en la mesure de l'angle \widehat{EGF} .
- Calcule les longueurs EF et FG arrondies au dixième.

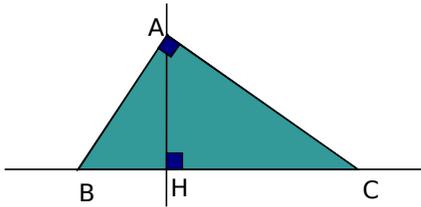
28 MOI est un triangle tel que $MO = 15$ cm, $OI = 25$ cm et $IM = 20$ cm.

- Ce triangle est-il rectangle ? Justifie ta réponse.
- Calcule la mesure arrondie au degré de chacun des angles de ce triangle.

29 Dans un losange

BIEN est un losange de centre O tel que $IN = 7$ cm et $BE = 4$ cm. Calcule la mesure arrondie au degré de chacun des angles de ce losange.

30 Extrait du Brevet



AHC est un triangle rectangle en H. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.

On sait que $AH = 4,8$ cm et $HC = 6,4$ cm.

- Justifier l'égalité : $\widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{HAC}$.
- Justifier l'égalité : $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{HAC}$.
- Que peut-on en déduire pour les angles \widehat{ACH} et \widehat{BAH} ?
- Montrer que $\tan \widehat{ACH} = \frac{3}{4}$.
- En utilisant le triangle BAH, exprimer \widehat{BAH} en fonction de BH.
- Déduire des questions précédentes que $BH = 3,6$ cm.
- Calculer la mesure en degrés, arrondie au degré de l'angle \widehat{ACH} .

Problèmes

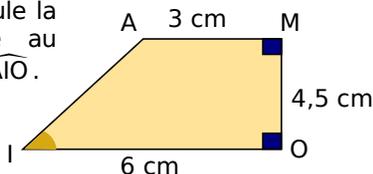
31 Trace un cercle (\mathcal{C}) de diamètre [BC] tel que $BC = 7$ cm.

Place un point A sur le cercle (\mathcal{C}) tel que $AB = 2,5$ cm.

- Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Place le point H.
- Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.
- Calcule la valeur de l'angle \widehat{ACB} arrondie au degré.
- Calcule la longueur AH arrondie au millimètre.

32 Dans un trapèze rectangle

À l'aide des informations de la figure, calcule la mesure arrondie au degré de l'angle \widehat{AIO} .



33 MNOP est un rectangle de longueur $MN = 18$ cm et de largeur $MP = 7,5$ cm.

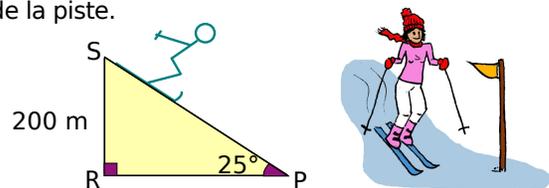
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{OMN} arrondie au degré.
- Calcule la longueur de la diagonale de ce rectangle arrondie au millimètre.
- Soit H le pied de la hauteur issue de N dans le triangle MNO. Calcule la longueur NH arrondie au millimètre.

34 RIEN est un rectangle tel que $\widehat{RIN} = 40^\circ$ et $RE = 8,5$ cm.

- Construis une figure en vraie grandeur.
- Calcule la longueur et la largeur de ce rectangle, arrondies au millimètre.

35 Piste noire

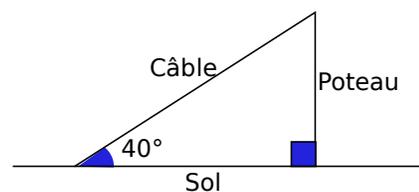
Un skieur descend une piste ayant une pente de 25° . Des fanions sont plantés aux positions S et P de la piste.



Calcule la distance entre les deux fanions S et P arrondie au dixième de mètre.

36 Extrait du Brevet

Un câble de 20 m de long est tendu entre le sommet d'un poteau vertical et le sol horizontal. Il forme un angle de 40° avec le sol.



- Calculer la hauteur du poteau ; donner la valeur approchée au dixième près par défaut.
- Représenter la situation par une figure à l'échelle 1/200. (Les données de la situation doivent être placées sur la figure.)

37 Triangle isocèle

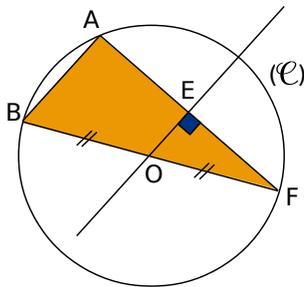
MAI est un triangle isocèle en A tel que $MI = 5$ cm. La hauteur [AH] mesure 3 cm. Calcule la mesure arrondie au degré de chacun des angles de ce triangle.



38 Extrait du Brevet

Sur le schéma ci-dessous :

- (\mathcal{C}) est un cercle de centre O et de diamètre $BF = 40$ mm ;
- A est un point du cercle (\mathcal{C}) tel que $AB = 14$ mm ;
- La perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment $[AF]$ en E .



- Quelle est la nature du triangle ABF ? Justifier la réponse.
- Calculer la valeur arrondie au dixième de degré de l'angle \widehat{AFB} .
- Calculer la valeur arrondie au millimètre de la longueur EF .

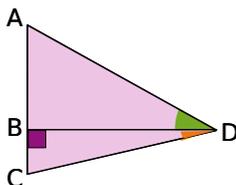
39 Méli-mélo de triangles

Construis un triangle ABC rectangle en A et tel que $\widehat{ABC} = 40^\circ$ et $BC = 8$ cm. E désigne le milieu de $[BC]$. La parallèle à la droite (AE) passant par C coupe la droite (AB) en F .

- Montre que $AE = 4$ cm.
- Calcule la longueur AB . Donne la valeur arrondie au millimètre.
- Calcule la longueur AC . Donne la valeur arrondie au millimètre.
- Montre que (AC) est la médiatrice de $[BF]$.

40 Histoire de périmètre

Observe le dessin ci-dessous.
On a $\widehat{ADB} = 52^\circ$; $BD = 20$ dm et $\widehat{BDC} = 8^\circ$.



Calcule le périmètre du triangle ACD arrondi au décimètre.

41 Trapèze et aire

On considère $MNRP$ un trapèze rectangle tel que le côté $[MN]$ est perpendiculaire aux bases $[MP]$ et $[RN]$.

On a $MN = 4$ cm ; $\widehat{MNP} = 60^\circ$ et $RP = RN$.

La perpendiculaire à la droite (NP) passant par R coupe $[NP]$ en H .

- Construis une figure à main levée.
- Calcule les longueurs MP , NP , RH et RN ; arrondis si besoin les longueurs au millimètre.
- Détermine la valeur arrondie au centimètre carré de l'aire du trapèze $MNRP$.

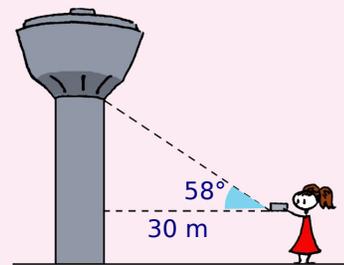
42 Triangle isocèle

Soit OAB un triangle isocèle en O tel que $OA = 10$ cm et $\widehat{AOB} = 36^\circ$.

- Construis ce triangle. Trace la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} , elle coupe le segment $[AB]$ en H .
- Montre que le triangle OHB est rectangle en H et que H est le milieu du segment $[AB]$.
- Calcule la longueur AB arrondie au millimètre.

43 Château d'eau

Juliette mesure l'angle entre l'horizontale et le haut du réservoir d'un château d'eau grâce à un appareil placé à 1,70 m du sol. Elle trouve 58° .



- Calcule la hauteur du château d'eau arrondie au mètre.
- La contenance de celui-ci est de 500 m^3 d'eau. Calcule le diamètre de la base en considérant que le réservoir du château d'eau est cylindrique. Arrondis au décimètre.

44 Sans calculatrice

Pour chaque question, justifie la construction.

- Construis un angle \hat{A} tel que $\tan \hat{A} = \frac{8}{9}$.
- Construis un angle \hat{B} tel que $\sin \hat{B} = 0,6$.

45 Cerf-volant

Elsa joue au cerf-volant sur la plage.

La ficelle est déroulée au maximum et tendue.

L'angle de la ficelle avec l'horizontale est de 48° . Elsa tient son dévidoir à 60 cm du sol.

Le cerf-volant vole à 12 m du sol.



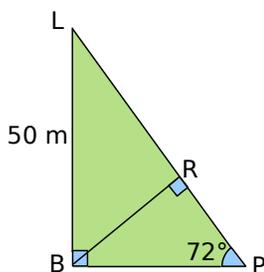
(source : fr.wikipedia.org)

- Dessine un schéma de la situation.
- Calcule la longueur de la ficelle déroulée. Donne la valeur arrondie au dixième.

46 Course

Rafaël et Léo nagent pour atteindre la bouée P. Ils sont respectivement en position R et L.

On a $BL = 50$ m et $\widehat{BPL} = 72^\circ$.



Calcule la distance entre les deux nageurs, arrondie au mètre.

47 Extrait du Brevet

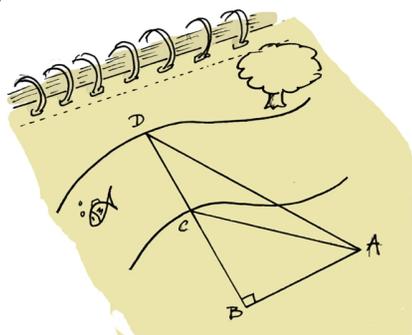
Monsieur Schmitt, géomètre, doit déterminer la largeur d'une rivière. Voici le croquis qu'il a réalisé :

$AB = 100$ m ;

$\widehat{BAD} = 60^\circ$;

$\widehat{BAC} = 22^\circ$;

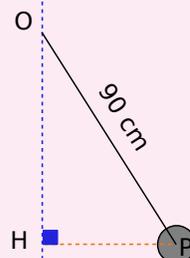
$\widehat{ABD} = 90^\circ$.



- Calculer la longueur BC au dixième près.
- Calculer la longueur BD au dixième près.
- En déduire la largeur de la rivière à un mètre près.

48 Histoire de pendule

Un pendule est constitué d'une bille suspendue à un fil inextensible, fixé en un point O. La longueur du fil est de 90 cm. Le fil du pendule est initialement vertical.

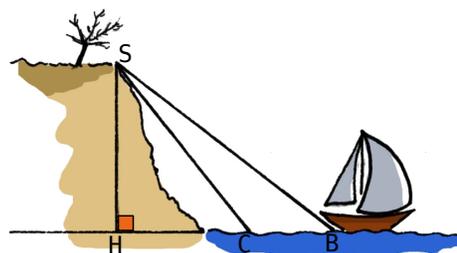


- Premier cas : on l'écarte de 520 mm de sa position initiale. Détermine la mesure arrondie au degré de l'angle obtenu entre le fil et la verticale.
- Deuxième cas : une fois écarté, le fil fait un angle de 48° avec la verticale. Détermine la distance entre le pendule et la verticale, arrondie au centimètre.

49 Charlotte navigue le long d'une falaise.

Pour des questions de sécurité, elle ne doit pas aller au-delà du point C. Elle a jeté l'ancre au point B.

On a $SH = 100$ m, $\widehat{HCS} = 75^\circ$ et $\widehat{HBS} = 65^\circ$.



À quelle distance du point C le bateau de Charlotte se trouve-t-il ? Donne la valeur approchée par excès au dixième de mètre près.

50 Tangentes

(\mathcal{C}) est un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Soient A et B deux points de ce cercle tels que $\widehat{AOB} = 64^\circ$.

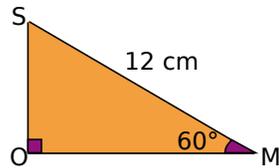
La droite (d) est la tangente en A et la droite (d') est la tangente en B au cercle (\mathcal{C}). Elles se coupent au point S.

- Fais un dessin.
- Calcule les longueurs SA et SO arrondies au millimètre.
- Trace le cercle de diamètre [SO]. Montre que ce cercle passe par A et B.



51 Cône de révolution

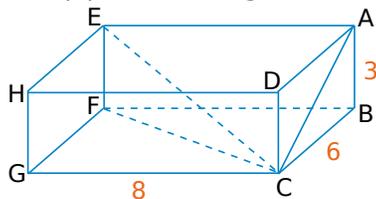
Soit un cône de révolution de sommet S engendré par le triangle ci-contre.



- Calcule la valeur exacte de la hauteur de ce cône.
- Déduis-en la valeur exacte du volume de ce cône puis la valeur arrondie au centimètre cube.

52 Pavé droit

Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

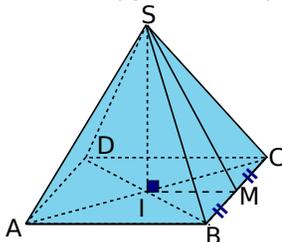


On admet que les triangles EFC et ACE sont rectangles respectivement en F et en A.

- Calcule la valeur exacte de la longueur EC.
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{CEF} arrondie au degré.
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{CEA} arrondie au degré.
- Calcule le volume de la pyramide CABFE.

53 Extrait du Brevet

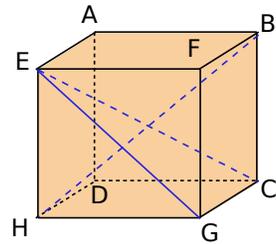
SABCD est une pyramide régulière dont la base est le carré ABCD de côté 5 cm et de centre I. La hauteur [SI] de la pyramide a pour longueur $SI = 3$ cm.



- Calculer le volume de la pyramide.
- Soit M le milieu de l'arête [BC]. Démontrer que la longueur IM est égale à 2,5 cm.
- On admet que le triangle SIM est rectangle en I. Calculer $\tan \widehat{MSI}$.
- En déduire une mesure de l'angle \widehat{MSI} à 1° près.

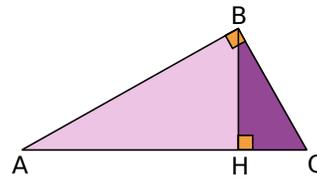
54 Cube

ABCDEFGH est un cube de côté 5 cm.



- Calcule les longueurs AF et EC.
- On admet que le triangle EGC est rectangle en G. Calcule la mesure de l'angle \widehat{ECG} arrondie au degré.
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{BHC} arrondie au degré.
- Réalise le patron de la pyramide EHGC.

55 Le triangle ABC est rectangle en B. Le segment [BH] est la hauteur du triangle issue de B. Il coupe le segment [AC] en H.



- Démontre que $\widehat{ABH} = \widehat{BCH}$.
- Exprime $\tan \widehat{ABH}$ en utilisant les longueurs des côtés du triangle ABH.
- Exprime $\tan \widehat{BCH}$ en utilisant les longueurs des côtés du triangle CBH.
- Démontre que $BH^2 = AH \times CH$.

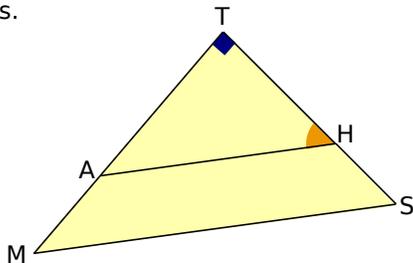
56 Valeurs exactes

Dans cet exercice, tu utiliseras les données du tableau suivant.

Angle	Cosinus	Sinus	Tangente
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Trace un triangle BEH rectangle en E tel que $EH = 12$ cm et $\widehat{BHE} = 30^\circ$.
- Montre que la longueur HB est égale à $8\sqrt{3}$ cm.
- Trace la hauteur du triangle BEH issue de E. Elle coupe le segment [BH] en P.
- Calcule la valeur exacte de la longueur PE.
- Calcule la valeur exacte de la longueur BP.
- Calcule la valeur exacte de l'aire du triangle BPE puis donne l'arrondi au centième.

57 Soit le triangle MTS tel que $MS = 23$ cm et $TM = 15$ cm. Les droites (AH) et (MS) sont parallèles.



- En justifiant ta réponse, écris les rapports de longueurs qui sont égaux.
- Écris la relation donnant le sinus de l'angle \widehat{AHT} .
- Déduis des questions **a.** et **b.** la mesure arrondie au degré de l'angle \widehat{AHT} .

58 *Relations entre sinus, cosinus et tangente*

Soit MOT un triangle rectangle en M.

- Que peux-tu dire des angles \widehat{MTO} et \widehat{TOM} ?
- Écris les rapports entre les longueurs des côtés donnant le sinus, le cosinus et la tangente des angles \widehat{MTO} et \widehat{TOM} .
- Utilise la question **b.** pour écrire trois égalités.
- Déduis de ces égalités deux propriétés sur les angles complémentaires d'un triangle rectangle.

59 *Possible ou impossible ?*

Existe-t-il un angle aigu \widehat{A} tel que :

- $\cos \widehat{A} = \frac{3}{4}$ et $\sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$?
- $\cos \widehat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin \widehat{A} = \frac{2}{5}$?

60 *Avec une formule trigonométrique*

Calcule la valeur exacte de $\sin \widehat{B}$ et de $\tan \widehat{B}$ sachant que \widehat{B} est un angle aigu tel que $\cos \widehat{B} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

61 *Avec une formule trigonométrique (bis)*

Calcule la valeur exacte de $\cos \widehat{C}$ et de $\tan \widehat{C}$ sachant que \widehat{C} est un angle aigu tel que $\sin \widehat{C} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

62 *Avec les formules trigonométriques*

Soit \widehat{B} un angle aigu tel que $\tan \widehat{B} = \frac{1}{2}$.

- Exprime $\sin \widehat{B}$ en fonction de $\cos \widehat{B}$.
- Déduis-en la valeur exacte de $\cos \widehat{B}$ et $\sin \widehat{B}$.

63 On considère \widehat{A} un angle aigu.

En utilisant les formules trigonométriques, démontre les égalités suivantes.

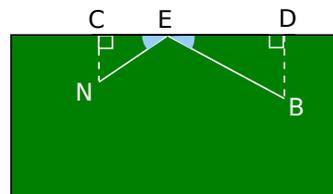
- $1 + \tan^2 \widehat{A} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}$
- $1 + \frac{1}{\tan^2 \widehat{A}} = \frac{1}{\sin^2 \widehat{A}}$
- $\cos^2 \widehat{A} - \sin^2 \widehat{A} = 1 - 2\sin^2 \widehat{A}$
- $(\cos \widehat{A} + \sin \widehat{A})^2 = 1 + 2\sin \widehat{A} \cos \widehat{A}$

64 *Extrait du Brevet*

L'unité de longueur est le centimètre.

Le rectangle ci-dessous représente une table de billard. Deux boules de billard N et B sont placées telles que $CD = 90$; $NC = 25$ et $BD = 35$. (Les angles \widehat{ECN} et \widehat{EDB} sont droits.)

Un joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet BEN, E étant entre C et D, et tel que $\widehat{CEN} = \widehat{DEB}$.



On pose $ED = x$.

- Donner un encadrement de x .
- Exprimer CE en fonction de x .
- Dans le triangle BED, exprimer $\tan \widehat{DEB}$ en fonction de x .
- Dans le triangle NEC, exprimer $\tan \widehat{CEN}$ en fonction de x .
- En égalant les deux quotients trouvés aux questions **c.** et **d.**, on trouve l'équation $35(90 - x) = 25x$. (On ne demande pas de justification.) Résoudre cette équation.
- En déduire la valeur commune des angles \widehat{CEN} et \widehat{DEB} arrondie au degré.



1 Formules d'Al-Kashi

1^{re} Partie : Un peu de recherche

- Recherchez dans un dictionnaire, une encyclopédie ou sur Internet, des informations sur les mathématiciens Al-Kashi et Pythagore.
- Al-Kashi est célèbre pour les formules suivantes qui portent son nom.

« Dans un triangle ABC, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC},$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC},$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}. »$$

Expliquez pourquoi chacune de ces formules porte aussi le nom de « théorème de Pythagore généralisé ».

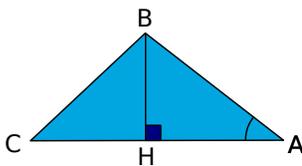
- Préparez avec ces informations un panneau ou un diaporama.

2^e Partie : Quelques tests

- Chaque membre du groupe construit un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm et $AC = 5$ cm. Pour le premier, $\widehat{BAC} = 45^\circ$; pour le deuxième, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ et pour le troisième, $\widehat{BAC} = 30^\circ$.
- À l'aide des formules d'Al-Kashi et des valeurs remarquables de $\cos 30^\circ$; $\cos 45^\circ$ et $\cos 60^\circ$, calculez la valeur exacte de BC dans chacun des trois triangles. Calculez ensuite les valeurs arrondies au centième de chacun des résultats.

3^e Partie : Démonstration

Sur la figure ci-dessous, [BH] est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

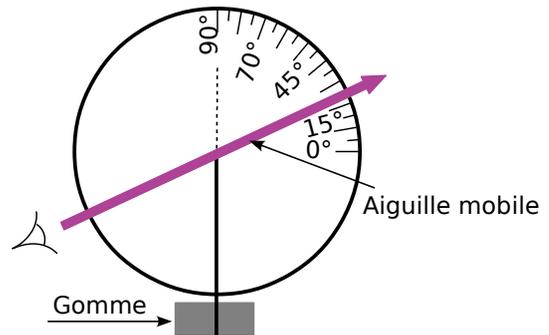


- Pourquoi peut-on utiliser les formules de trigonométrie dans les triangles ABH et BCH ?
- Calculez HA en fonction de l'angle \widehat{BAC} et de AB.
- Déduisez-en une expression de CH en fonction de l'angle \widehat{BAC} , de AB et de AC.
- En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, calculez une expression de BH^2 .
- En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle BCH, calculez une expression de BC^2 .
- En utilisant les identités remarquables, réduisez l'expression de BC et retrouvez la première formule d'Al-Kashi (donnée dans la première partie).

2 Triangulation

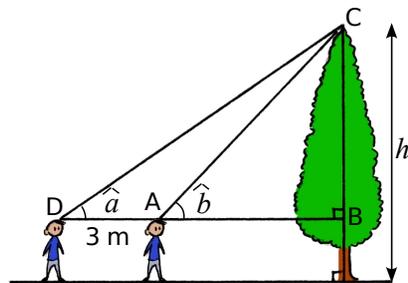
1^{re} Partie : Fabrication d'un viseur

- Dans une feuille de carton rigide, découpez un disque de rayon 10 cm.
- En son centre, avec une attache parisienne, fixez une aiguille plus longue que le diamètre du cercle et un fil au bout duquel vous nouerez une petite gomme.
- Sur un quart du cercle, graduez tous les degrés (inspirez-vous du modèle ci-dessous.). Tracez le diamètre au niveau de la graduation 90° . (Il servira à positionner le viseur verticalement au moment de prendre des mesures sur le terrain.)



2^e Partie : Sur le terrain

- Choisissez un objet à mesurer (clocher, arbre...). Munissez-vous du viseur et d'un mètre.
- À l'aide du viseur, prenez les deux mesures d'angles \hat{a} et \hat{b} comme indiqué ci-dessous.



3^e Partie : Interprétation des observations

- Dans le triangle ABC, exprimez la longueur AB en fonction de BC et de \hat{b} . Déduisez-en la longueur DB en fonction de BC et de \hat{b} .
- Dans le triangle BCD, exprimez $\tan \hat{a}$. Vous venez d'obtenir une équation d'inconnue BC. Résolvez cette équation.
- Utilisez les données obtenues avec le viseur pour calculer la longueur BC. Déduisez-en une valeur approchée de la hauteur h .

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1	[AC] est le côté adjacent à l'angle aigu \widehat{BAC} dans le triangle...				
2	[AB] est le côté opposé à l'angle aigu \widehat{BCA} dans le triangle...				
3	TGP est un triangle rectangle en P donc...	$\cos \widehat{TGP} = \frac{GP}{TP}$	$\sin \widehat{GTP} = \frac{GP}{TG}$	$TG^2 = TP^2 + PG^2$	$\tan \widehat{GTP} = \frac{GP}{TP}$
4	$\tan 45^\circ = \frac{AB}{7}$ donc...	$AB = 7 \times \tan 45^\circ$	$AB = \frac{\tan 45^\circ}{7}$	$AB = \frac{7}{\tan 45^\circ}$	$AB \approx 7$
5		$\sin \widehat{OMP} = \frac{OM}{OP}$	$\cos \widehat{OPE} = \frac{MO}{OP}$	$\tan \widehat{EPO} = \frac{OE}{PO}$	$\sin \widehat{OPM} = \frac{OE}{OP}$
6	LNT est un triangle rectangle en N tel que TN = 7 cm et LN = 5 cm. On a donc...	$\widehat{TLN} = \frac{5}{7}$	$\widehat{TLN} \approx 54^\circ$	$\tan \widehat{TLN} = 1,4$	$\tan \widehat{LTN} \approx 0,7$
7	QRS est un triangle rectangle en R tel que SQ = 10 et RQ = 8 (en cm). On a donc...	$\widehat{RSQ} = 53^\circ$	$\widehat{RSQ} \approx 37^\circ$	$\widehat{RSQ} = 37^\circ$	$\widehat{RSQ} \approx 53^\circ$
8	Le triangle ISO est un triangle rectangle et isocèle en S donc...	$OI = SO \times \sqrt{2}$	$\frac{OS}{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \widehat{IOS} = 1$	$\tan \widehat{OIS} = 1$
9	Le sinus d'un angle aigu est...	un nombre quelconque	un nombre supérieur à 1	un rapport de longueurs	compris entre 0 et 1
10	\hat{x} et \hat{y} sont deux angles complémentaires donc...	$\tan \hat{x} = \tan \hat{y}$	$\cos \hat{x} = \sin \hat{y}$	$\sin \hat{x} = \cos \hat{y}$	$\sin \hat{x} = \sin \hat{y}$

Récréation mathématique

Terre, terre !

Un voilier suit un cap fixe à la vitesse constante de $22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le capitaine du bateau note l'heure à laquelle l'angle entre la direction du cap et celle de l'îlot I mesure 24° (position A) puis 38° (position B). Il déclare : « Entre les deux relevés, il s'est écoulé 12 minutes. J'en déduis que nous passerons donc à 4,6 km environ de l'îlot (distance d sur la figure). » Justifie l'affirmation du capitaine.

Indication : Exprime AB en fonction de d , $\tan 24^\circ$ et $\tan 38^\circ$ puis déduis-en d en utilisant une calculatrice.

