Exercices de synthèse

1 *Des pourcentages dans tous leurs états*

Dans un collège, on a relevé les résultats d'orientation des 60 élèves de troisième.
Il n'y a que quatre types d'orientation dans les trois classes : 2GT (seconde générale ou technologique), 2Pro (seconde professionnelle), A (apprentissage) ou R (redoublement).

a. Reproduire puis compléter le tableau.

b. Exprimer, en pourcentage, le nombre d'élèves de 3ᵉA orientés en 2Pro.

	2GT	2Pro	A	R	Total
3ᵉA	9	7	3	1	
3ᵉB	8		3	2	22
3ᵉC	7	9		0	

c. Calculer le pourcentage d'élèves de troisième de ce collège admis en 2GT.

d. L'effectif total des troisièmes baissera de 5 % l'année prochaine, combien y aura-t-il alors d'élèves ?

e. Le nombre d'élèves de troisième était en augmentation de 20 % cette année par rapport à l'année dernière. Combien y avait-il d'élèves l'année dernière ?

2 *Pourcentages (formation des prix)*

Un artisan s'équipe chez un grossiste. Bon client, il bénéficie de prix réduits de 2 %.
Pour calculer le prix de revient de son matériel, il doit rajouter des frais (principalement de transport) qui représentent en moyenne 15 % du tarif réduit dont il bénéficie.

a. Pour l'achat de matériel, il a payé 147 € (au tarif réduit). Calculer le prix de revient de ce matériel puis retrouver son prix initial (avant la réduction).

b. Exprimer, en pourcentage, la variation entre le prix initial et le prix de revient pour l'artisan.

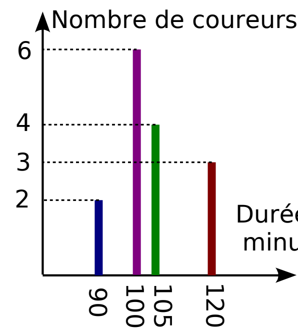
c. Pour dégager une marge, l'artisan détermine le prix HT (hors taxes) ainsi : en diminuant de 30 % le prix de vente HT, il doit retrouver le prix de revient. Calculer le prix de vente HT de ce matériel.

d. Calculer enfin le prix TTC (toutes taxes comprises) en ajoutant au prix HT une TVA à 5,5 %.

3 *Synthèse en statistiques, proportionnalité*

Un groupe de 15 amis a participé à un semi-marathon (21 km).

Durée (en min)	90	100	105	120
Effectif	2			



a. Reproduire puis compléter le tableau à partir du diagramme.

b. Déterminer une médiane de la série statistique ainsi définie.

c. Calculer la moyenne puis l'étendue.

d. Calculer la fréquence d'arrivée en 120 min.

e. Quel est le pourcentage de coureurs arrivés en au moins 100 min ?

f. On suppose que les neuf premiers kilomètres sont en montée, les 12 autres sont en descente.
Laurent a parcouru les neuf premiers kilomètres en 40 min et les 12 derniers kilomètres en 50 min.

- Calculer, en kilomètres par heure, la vitesse moyenne de Laurent en montée puis celle en descente et enfin celle sur le parcours total.
- Marc est allé à 12 $km{\cdot}h^{-1}$ en montée et à 16 $km{\cdot}h^{-1}$ en descente. Calculer la durée de sa course.

g. Marc débute dans le semi-marathon. Au repos, son rythme cardiaque moyen est de 80 pulsations par minute. En s'entraînant, il devra apprendre à stabiliser son rythme pendant l'effort à 145 pulsations par minute.
Calculer le pourcentage d'augmentation du rythme entre le repos et l'effort.

h. Après des années d'entraînement, un sportif peut faire baisser son rythme cardiaque au repos de 30 %. Si un sportif de haut niveau a un rythme de 56 pulsations par minute au repos, quel devait être son rythme cardiaque au repos avant qu'il ne se mette au sport ?

4 *Problèmes de fractions, PGCD*

a. Dans un club sportif, $\frac{1}{12}$ des adhérents ont moins de 30 ans et les $\frac{3}{4}$ des autres ont plus de 50 ans. Calculer la fraction des adhérents qui ont entre 30 et 50 ans.

b. Déterminer le PGCD des nombres 693 et 819 puis en déduire la forme irréductible de $Q = \frac{693}{819}$.

c. On pose $N = Q + \frac{80}{13}$. Démontrer que N est un nombre entier.

d. Calculer le PGCD de 462 et 65. Que peut-on en déduire pour la fraction $C = \frac{462}{65}$?

5 *Calculs numériques de base d'après Brevet des Collèges (fractions, puissances)*

$A = \frac{6}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{2}$ $\quad B = \frac{\frac{3}{4} - 4}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$ $\quad C = 3^2 \times 2 - 125 \times 10^{-1}$ $\quad D = \frac{3{,}2 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^{6}}{4 \times 10^{-2}}$

En précisant les différentes étapes des calculs :

a. écrire A sous la forme d'une fraction irréductible et B sous la forme d'un entier relatif ;

b. écrire C sous la forme d'un nombre décimal et donner l'écriture scientifique de D.

6 *Calculs numériques (fractions, puissances)*

$A = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} \div \left(\frac{-16}{5}\right)$ $\quad B = \frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{7}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{3}}$ $\quad C = \frac{2 \times 10^3 \times 5 \times \left(10^{-5}\right)^2}{2 + 18}$ $\quad D = \frac{7 \times 10^{-3}}{63 \times 10^{-5}}$

En précisant les différentes étapes des calculs, écrire chacune des expressions A, B et D sous forme de fractions irréductibles puis donner l'écriture scientifique de C.

7 *Calculs numériques (fractions, radicaux)*

Écrire les nombres suivants sous la forme la plus simple possible.

$E = 5\sqrt{72}$ $\quad F = 2\sqrt{15} \times \sqrt{20}$ $\quad G = \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{27}}$

$H = 14\sqrt{\frac{3}{49}}$ $\quad I = \sqrt{\frac{7}{50}} \times 15\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{35}}$ $\quad J = \sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt{2}$

8 *Calculs numériques d'après Brevet des Collèges (fractions, puissances, radicaux)*

$A = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \times 6 - 1 \div \frac{7}{5}$ $\quad B = \frac{5 \times 10^3 \times 0{,}2 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-2}}$ $\quad C = 2\sqrt{45} - 5\sqrt{20} - \sqrt{80}$

$D = \left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)^2$ $\quad E = \left(2\sqrt{7} - 9\right)\left(2\sqrt{7} + 9\right)$

a. Calculer A en donnant le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

b. Donner la notation scientifique de B.

c. Écrire C sous la forme $a\sqrt{b}$ (a entier relatif et b entier le plus petit possible).

d. Développer et réduire D et E.

9 *Calculs numériques (approfondissement)*

a. Calculer les valeurs exactes des trois nombres suivants afin de vérifier que ce sont trois nombres entiers consécutifs (faire figurer les différentes étapes des calculs effectués).

$$\text{R} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{2} \qquad \text{S} = \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \qquad \text{T} = \frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}+2} \div \frac{1}{3\times 13}$$

b. Donner l'écriture scientifique de $\text{U} = 2\times 10^{42} + 3\times 10^{40} - 7\times 10^{38}$ puis de $\text{V} = \dfrac{7\times 10^{84} + 5\times 10^{83}}{12\times 10^{72}}$.

10 *Calculs algébriques, vers la seconde (fractions, puissances, radicaux)*

a. Simplifier les nombres suivants (a et b désignent des nombres positifs).

$$\sqrt{5a^2} \qquad \sqrt{4a^2b} \qquad \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \qquad \sqrt{90ab^2} \qquad \sqrt{12ab}\times 5\sqrt{3ab^3} \qquad 3\sqrt{2a}+5\sqrt{8a}-\sqrt{32a}$$

b. Soient a et b deux nombres non nuls. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances d'exposants positifs.

$$\left(-a^{-2}b\right)^3 \qquad \left(2ab^3\right)^{-2} \qquad \left(\frac{a}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{b}\right)^{-2} \qquad \frac{\left(2a^2b\right)^3}{4a^3b} \times \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-3} \qquad \frac{a^2\times\left(b^5\right)^{-2}\times a^4}{\left(a^3\right)^2\times b^{-4}} \times \left(\frac{b}{a^{-2}}\right)^2$$

11 *Développer, calculer d'après Brevet des Collèges*

a. Développer et réduire $\text{D} = (3x+1)^2 - (3x-1)^2$.

b. En déduire, sans calculatrice et en détaillant le calcul effectué, la valeur de $\text{M} = 3\,001^2 - 2\,999^2$.

12 *Développer, calculer (bis)*

a. Développer et réduire $\text{E} = (3n-1)^2 + (4n+1)(4n-1) - (5n+1)^2$.

b. En déduire comment calculer astucieusement $\text{N} = 299^2 + 401 \times 399 - 501^2$.

13 *Développer, factoriser, substituer (fractions, relatifs)*

On donne $\text{E} = (x-3)(x+3) - 2(x-3)$; $\text{F} = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-6)$ et $\text{G} = (2x+3)^2 - 1$.

a. Développer et réduire chaque expression.

b. Factoriser chaque expression.

c. Calculer la valeur de E pour $x = -1$; celle de F pour $x = \dfrac{1}{3}$ puis celle de G pour $x = -\dfrac{3}{2}$.

14 *Développer, substituer (radicaux)*

On donne $\text{M} = (x-1)^2 - (2x-3)(2x+3)$ et $\text{N} = 5x - (x+2)^2 + 5$.

a. Développer et réduire les deux expressions.

b. Calculer la valeur de M sous la forme $a+b\sqrt{c}$ (a et b entiers relatifs et c entier le plus petit possible) pour chaque valeur de x suivante : $\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $-\sqrt{7}$ et $-5\sqrt{2}$.

c. Calculer la valeur exacte simplifiée de N pour chaque valeur de x suivante : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $1-5\sqrt{6}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15 *Développer, factoriser, résoudre d'après Brevet des Collèges*

Soient A $= (7x - 3)^2 - 9$; B $= (4x + 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2$ et C $= (x - 3)^2 + (x - 3)(x + 3)$.

a. Développer A, factoriser A puis résoudre l'équation $7x(7x - 6) = 0$.

b. Développer B, factoriser B puis résoudre l'équation $(2x - 3)(2x + 10) = 0$.

c. Développer C, factoriser C puis résoudre l'équation $x(x - 3) = 0$.

16 *Développer, factoriser, résoudre (approfondissement, d'après Brevet des Collèges)*

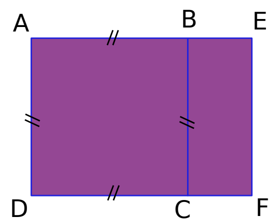
Soient D $= (2x - 3)^2 + (2x - 3)(x - 2)$; E $= 25 - (2x - 1)^2$ et F $= 4x^2 - 9 - (2x + 3)(x - 2)$.

a. Développer D, factoriser D puis résoudre l'équation D $= 0$.

b. Développer E, factoriser E puis résoudre l'équation $(2x + 4)(- 2x + 6) = 0$.

c. Développer F, factoriser F puis résoudre l'équation $(2x + 3)(x - 1) = 0$.

17 *Racines carrées et géométrie d'après Brevet des Collèges*



Calculer la valeur exacte simplifiée de l'aire du carré ABCD et l'aire du rectangle AEFD ci-contre sachant que AB $= \sqrt{13} - 1$ et BE $= 2$.

18 *Racines carrées et géométrie*

a. On donne AB $= 2\sqrt{11}$ cm ; AC $= \sqrt{154}$ cm et BC $= 3\sqrt{22}$ cm.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en précisant en quel point.

b. Calculer, sous forme exacte simplifiée, l'aire du triangle ABC puis l'aire de son cercle circonscrit.

19 *Racines carrées, identités remarquables et géométrie (approfondissement)*

M. Maniacos vient de s'offrir quatre chaises identiques à assise carrée de 4 dm de côté (figure 1) et souhaite faire fabriquer à son ami ébéniste, M. Matheux, une table rectangulaire pour pouvoir disposer ses chaises comme en figure 2, sachant que l'ensemble doit mesurer RT $= 16$ dm de large.

a. Calculer la valeur exacte, en centimètres, de la longueur FN et en déduire que FB $= 2\sqrt{2}$ dm.

b. Prouver que la largeur BC de la table est égale à $16 - 4\sqrt{2}$ dm.

M. Maniacos, soucieux de la largeur curieuse de sa table, demande à M. Matheux quelle sera sa longueur. Celui-ci lui répond que les chaises seront espacées de 16 dm dans le sens de la longueur de la table (figure 2, distance EF) car ainsi, le périmètre de la table et la longueur de sa diagonale seront des nombres entiers de décimètres et son aire un nombre entier de décimètres carrés !

c. Prouver que la longueur AB de la table est égale à $16 + 4\sqrt{2}$ dm.

d. Vérifier l'affirmation de M. Matheux en calculant l'aire de la table, son périmètre puis AC.

Figure 1 : Assise carrée de côté 4 dm vue de dessus

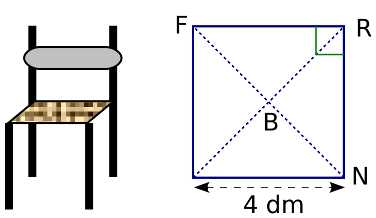
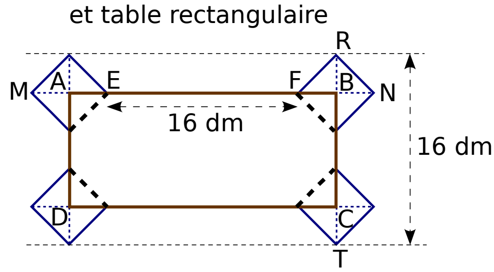
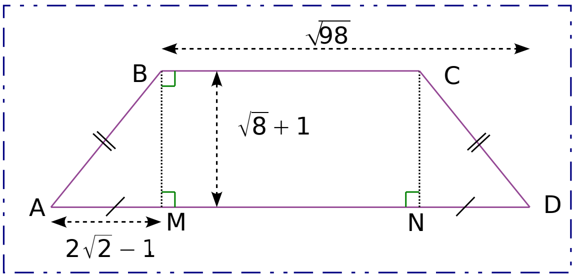


Figure 2 : Ensemble, chaises et table rectangulaire



20 *Racines carrées, identités remarquables et géométrie (vers la seconde)*

Pour le trapèze isocèle ci-contre, on donne :
AM = $2\sqrt{2}-1$; BM = $\sqrt{8}+1$ et MD = $\sqrt{98}$.
L'unité est le centimètre.



a. Exprimer sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b entiers :

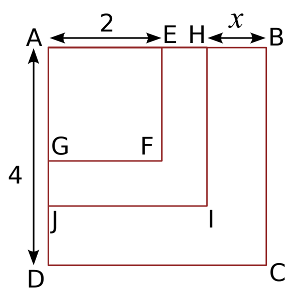
- la longueur AD de la grande base ;
- la longueur BC de la petite base (BC = MN).

b. Calculer l'aire du trapèze ABCD.
Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

c. Calculer AB puis en déduire le périmètre du trapèze ABCD. (Donner le résultat sous forme réduite.)

21 *Calcul littéral en géométrie (d'après Brevet des Collèges)*

a. Dans la figure ci-contre, AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés.
Calculer AH en fonction de x, en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.
M = $(4-x)^2-2^2$
N = $(4-x-2)^2$
P = $4^2-x^2-2^2$



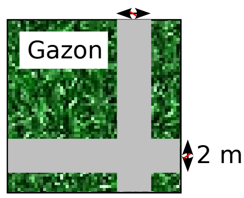
b. Développer et réduire l'expression Q = $(4-x)^2-2^2$.

c. Factoriser Q.

d. Calculer Q pour $x=2$. Que traduit ce résultat pour la figure ?

22 *Géométrie, fonction, équation*

M. Aucordeau possède un terrain carré recouvert de gazon et traversé perpendiculairement par deux allées rectangulaires de 2 m de large, comme le montre la figure ci-contre.

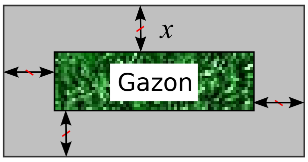


a. Sachant que l'aire du terrain dépasse celle recouverte de gazon de 124 m², calculer la mesure exacte de la longueur du côté du terrain.

b. En déduire, en m², les aires du terrain et de la partie recouverte de gazon.

M. Tondu possède un terrain rectangulaire dont la longueur, 124 m, est le double de la largeur.
Ce terrain est entouré d'une allée de x mètres de large, le reste est recouvert de gazon.

c. Exprimer, en fonction de x :



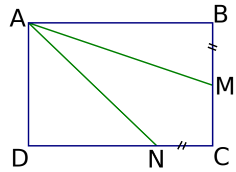
- le périmètre du gazon et noter f la fonction correspondante ;
- l'écart entre le périmètre du terrain et celui du gazon et noter g la fonction correspondante ;
- l'aire de l'allée.

d. Quelle est la nature de la fonction g ? Quelle est sa représentation graphique ? Et celle de la fonction f ? Quels sont les éléments caractéristiques de ces deux représentations ?

e. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

f. Interpréter la solution de l'équation précédente en comparant alors le périmètre du terrain à celui de la partie recouverte de gazon.

23 *Géométrie, fonction, équation d'après Brevet des Collèges*



ABCD est un rectangle tel que AB = 6 cm et AD = 4 cm. On pose BM = CN = x.

a. On suppose dans cette question que $x = 2$. Calculer AM.

b. Toujours pour $x = 2$, montrer que AMCN a une aire de 10 cm^2.

c. Pour les questions **c.** et **d.**, x est à nouveau une longueur variable comprise entre 0 et 4 cm.

- Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.
- Calculer DN en fonction de x puis l'aire du triangle ADN en fonction de x.

d. On considère les deux fonctions $f_1 : x \longmapsto f_1(x) = 3x$ et $f_2 : x \longmapsto f_2(x) = 12 - 2x$.
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$. Si x est une solution de cette équation, comment cela se traduit-il sur la figure ?

24 *Fonction, racines carrées, équations (vers la seconde)*

a. On considère la fonction h définie par $h(x) = 4x^2 - 20x - 1$. Reproduire puis compléter le tableau de valeurs suivant en calculant les images des nombres donnés. (Les résultats seront notés sous forme exacte simplifiée.)

x	-1	$\frac{3}{2}$	$2\sqrt{3}$	$1-\sqrt{5}$
$h(x)$				

b. Déterminer le (ou les) nombre(s) ayant pour image -1 par h (soit le (ou les) antécédent(s) de -1).

c. Résoudre l'équation $h(x) = -26$.

25 *Pythagore, Thalès et trigonométrie d'après Brevet des Collèges*

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur. (AB) est la hauteur issue de A dans le triangle AED.
On donne EF = 4 cm ; FG = 3 cm ; EG = 5 cm ; AE = 7 cm et $\widehat{DAB} = 30°$.

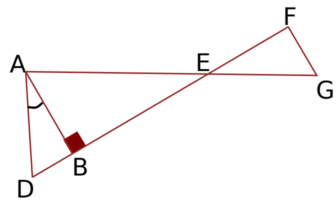
a. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.

b. En déduire que (FG) est parallèle à (AB).

c. Calculer BE et AB.

d. Calculer DB.

e. Calculer l'aire du triangle AED à 0,01 cm^2 près.



26 *Pythagore, Thalès et trigonométrie, agrandissement*

a. Construire un triangle ABC tel que AC = 4,5 cm ; AB = 7,5 cm et BC = 6 cm. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par B coupe la droite (AC) en D. En exprimant de deux façons tan $\widehat{BAC}$, montrer que BD = 10 cm.

c. En déduire que AD = 12,5 cm.

d. Placer le point N du segment [AB] tel que AN = 2,7 cm. Prouver que (BD) // (NC).

e. En déduire la longueur NC en centimètres.

f. La parallèle à la droite (AB) passant par C coupe la droite (BD) en M. Prouver que MD = 6,4 cm.

g. Quelle est la nature du quadrilatère NBMC ? En déduire la longueur MN en centimètres.

h. On réalise une maquette correspondant à la figure de cet exercice où l'aire du quadrilatère NBMC vaut alors 17,28 dm^2. Calculer l'échelle de l'agrandissement correspondant à cette réalisation.

i. En déduire la longueur m du segment de la maquette correspondant au segment [MN] de la figure.

27 *Cercle, Pythagore, Thalès et trigonométrie d'après Brevet des Collèges*

L'unité de longueur est le centimètre. Tracer un segment [AB] tel que AB = 12.
Placer le point H du segment [AB] tel que AH = 1.
Tracer ensuite un demi-cercle de diamètre [AB] et la perpendiculaire en H à la droite (AB).
On note C le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le demi-cercle.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Exprimer de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$. En déduire que AC = $2\sqrt{3}$.

c. Donner la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

d. Placer le point D de la droite (BC) tel que B, C et D soient dans cet ordre et que CD = 6.

- Calculer la valeur exacte de la longueur AD sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers positifs.
- Calculer la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{ADC}$.

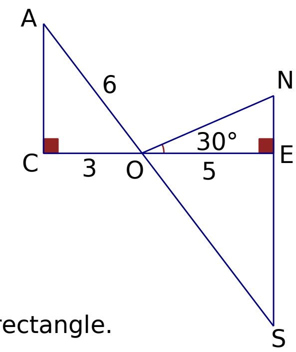
e. Placer le point E du segment [AD] tel que AE = 2 et le point F du segment [AC] tel que $\widehat{AEF}$ = 30°.

- Démontrer que les droites (EF) et (DC) sont parallèles.
- Calculer la longueur AF.

28 *Pythagore, Thalès et trigonométrie (valeurs exactes)*

La figure donnée dans cet exercice n'est pas en vraie grandeur, il n'est pas demandé de la reproduire.
L'unité de longueur est le centimètre et on donne :

- EO = 5, OC = 3 et OA = 6 ;
- E, O et C sont alignés et (AO) coupe (NE) en S ;
- les triangles ENO et OAC sont respectivement rectangles en E et en C.



b. Démontrer par le calcul que AC = $3\sqrt{3}$.

c. Montrer que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.
Calculer alors les valeurs exactes de OS et ES.

d. Calculer la valeur exacte de ON en utilisant $\widehat{NOE}$ = 30° et $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COA}$ puis démontrer que le triangle SON est rectangle.

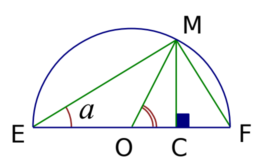
29 *Lignes trigonométriques doubles (vers la seconde)*

a. On considère un triangle ABC isocèle en A avec AB = AC = 1 dm et tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit aigu.
On note A' le pied de la hauteur issue de A et B' celui de la hauteur issue de B.

- Faire une figure puis exprimer en fonction de $a = \widehat{A'AC}$ la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'BC}$.
- Démontrer les trois égalités suivantes : BB' = sin $2a$; BB' = BC × cos a et BC = 2 sin a (en dm).
- Déduire, des trois résultats précédents, l'expression de sin $2a$ en fonction de sin a et cos a.

b. Sur un demi-cercle de centre O et de diamètre [EF] mesurant 2 dm, on place un point M tel que $a = \widehat{MEF}$. La perpendiculaire à (EF) passant par M coupe [EF] en C.

- Démontrer que $\widehat{MOF}$ = $2a$ puis que EC = 1 + cos $2a$ (en dm).
- Exprimer de deux façons cos a, puis prouver que $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.

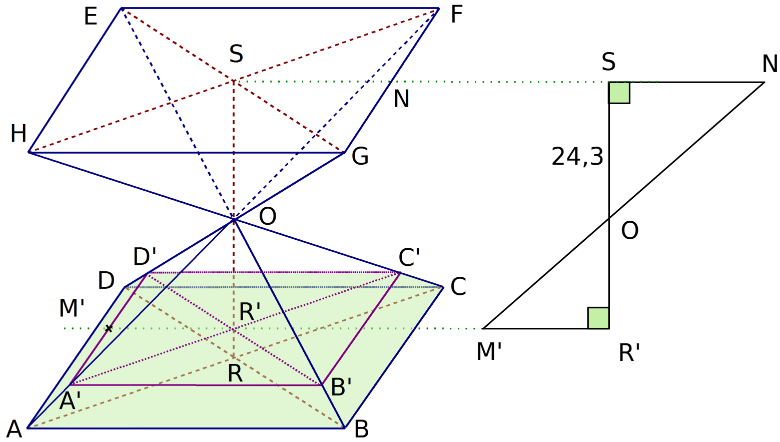


c. Sachant que $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, montrer que $\cos^2 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

d. Est-il vrai que $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$? Déterminer la valeur exacte de sin 15°.

30 *Pyramide, Thalès, Pythagore, réduction*

Un sablier a la forme d'une pyramide régulière OABCD à base carrée surmontée d'une pyramide identique OEFGH.
Les droites (AF), (BE), (CH) et (DG) sont concourantes en O.
Le volume occupé par le sable dans la partie inférieure du sablier a la forme d’un tronc de pyramide. On suppose que la surface du sable A’B’C’D’ est parallèle à la base ABCD, autrement dit que la pyramide OA’B’C’D’ est une réduction de la pyramide OABCD.



Sur la coupe verticale à droite de la perspective, M' désigne le milieu de [A'D'] et N le milieu de [FG].
On donne de plus : AB = 60 cm ; OS = 24,3 cm et A'B' = 54 cm.

a. Quel est le coefficient de réduction entre la pyramide OABCD et la pyramide OA’B’C’D’ ?

b. Par combien faut-il multiplier le volume de la pyramide OABCD pour obtenir celui de la pyramide OA’B’C’D’ ?

c. Calculer la hauteur OR' de la pyramide OA’B’C’D’.

d. Calculer le volume V_1 de la pyramide OABCD et le volume V_2 de la pyramide OA’B’C’D’ en cm^3.
En déduire le volume de sable contenu dans le sablier.

e. On retourne le sablier. En admettant que le sable s'écoule uniformément à la vitesse de 29,16 cm^3/s, calculer le temps qu'il va mettre pour passer entièrement de l'autre côté du sablier.

f. Lorsqu'on a rempli le sablier, le sable était dans un récipient cylindrique de diamètre 40 cm, la hauteur du sable y a alors diminué de h cm. Calculer au millimètre près la hauteur h.

31 *Cône, Pythagore, Thalès, trigonométrie, agrandissement*

Une bobine de fil est enroulée autour de l’assemblage en bois d’un cylindre surmonté de deux troncs de cône identiques (figure b). Les troncs de cône sont obtenus en « coupant » un cône de génératrice SF = 13,5 cm par un plan parallèle à sa base (figure a).

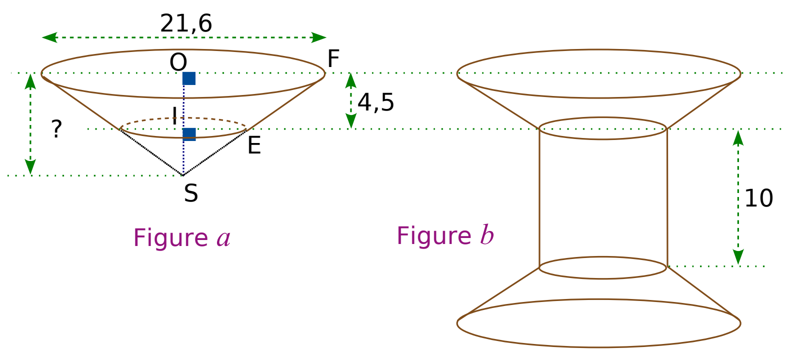


Figure a Figure b

a. Démontrer que SO = 8,1 cm.

b. Calculer l’arrondi au degré de la mesure de l’angle $\widehat{OSF}$.

c. Calculer le volume V_1, en cm^3, du cône 1 de sommet S et de base le disque de rayon [OF].
(Donner un résultat exact en fonction de π.)

d. En remarquant que (IE) est parallèle à (OF), montrer que IE = 4,8 cm.
En déduire le volume V_2, en cm^3, du cône 2 de sommet S et de base le disque de rayon [IE].
(Donner un résultat exact en fonction de π.)

e. Montrer que le volume exact du tronc de cône est V = 287,28π cm^3.
En déduire, au mm^3 près, le volume de bois nécessaire à la réalisation d’une bobine.

32 *Boule, fonction linéaire et tarif, moyenne, pourcentages*

Les trois parties du problème suivant sont indépendantes.

Partie A : Une entreprise fabrique des saladiers ayant la forme d'une demi-sphère de rayon 12 cm.

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume du saladier en fonction de π.

b. Une ménagère a besoin de 1,5 L de lait pour faire des crêpes.
Pourra-t-elle utiliser ce type de saladier pour les préparer ?

Partie B : Les saladiers sont vendus 5,50 € pièce.

a. Quel est le prix de vente de 800 saladiers ?

b. Soit n le nombre de saladiers achetés par un supermarché.
Exprimer, en fonction de n, le prix $f(n)$ en euros qu'il paiera au fabricant.
Déterminer l'antécédent de 6 600 par la fonction f et interpréter ce résultat.

c. Après avoir précisé sa nature et ses éléments caractéristiques, représenter graphiquement la fonction f. Unités du graphique : abscisse, 1 cm pour 200 saladiers ; ordonnée, 1 cm pour 1 000 €.

d. En effectuant une lecture graphique, mettre en évidence l'antécédent calculé à la question **b.**.

Partie C : Le responsable du supermarché a relevé le nombre de saladiers vendus par chacun de ses quatre vendeurs et l'a inscrit dans le tableau suivant.

Nom du vendeur	Karim	Anna	Halsa	Jean
Nombre de saladiers vendus	220	200	290	250

a. Quel est le pourcentage de vente d'Anna (arrondi à 0,1) par rapport au nombre total de ventes ?

b. Quel est le nombre moyen de saladiers vendus par vendeur ?

c. Le responsable du supermarché affirme qu'il a vendu 80 % de son stock de saladiers.
Combien avait-il acheté de saladiers ?

d. Il affirme aussi que, cette année, il s'est vendu 4 % de saladiers de moins que l'année dernière.
Quel nombre de saladiers avait vendu le supermarché l'année dernière ?

33 *Problèmes de tarifs, fonctions affines, équations et inéquations*

Un vidéo-club propose différents tarifs pour l'emprunt de DVD :

- Tarif A : 4 € par DVD emprunté.
- Tarif B : 2,50 € par DVD emprunté, après avoir payé une carte d'abonnement de 18 €.
- Tarif C : abonnement de 70 € pour un nombre illimité de DVD.

b. Lucas compte emprunter 5 DVD, combien paiera-t-il suivant chaque tarif ? Même question pour Bill qui veut en emprunter 15, puis pour Smaïl qui en veut 25 (rassembler les résultats dans un tableau).

c. On désigne par x le nombre de DVD empruntés. Exprimer, en fonction de x, le prix à payer suivant les trois tarifs. Noter f, g et h les trois fonctions correspondantes.

d. Tracer dans un même repère les représentations graphiques de ces trois fonctions après avoir précisé leurs natures. On prendra en abscisse, 1 cm pour 2 DVD et en ordonnée, 1 cm pour 5 €.

e. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'équation $4x = 2{,}5x + 18$. Interpréter le résultat.

f. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $70 < 2{,}5x + 18$. Interpréter le résultat.

Omar, le copain de Lucas, va dans un autre vidéo-club. Il a une formule d'abonnement du même type que celle correspondant au tarif B mais n'a pas dit à Lucas son prix de location pour un DVD ni combien coûte la carte d'abonnement. Il lui a juste dit qu'il payait 45 € pour 10 DVD et 65 € pour 20 DVD.

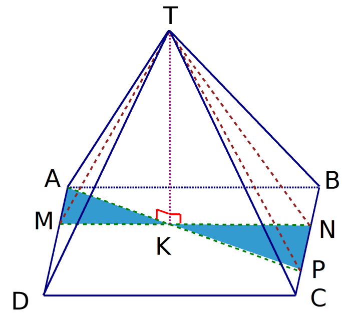
g. On note k la fonction qui au nombre x de DVD empruntés par Omar, fait correspondre le prix qu'il paye en euros. Déterminer l'expression de $k(x)$ en fonction x.

h. Vérifier que pour 8 DVD empruntés, Omar ferait mieux de changer de vidéo-club mais pas pour 18 DVD. Puis déterminer à partir de combien de DVD il ferait mieux de changer de vidéo-club.

Exercices de synthèse

34 *Pyramides, Thalès et Pythagore, équations, fonction*

Dans tout ce problème, l'unité est le centimètre.
Tracer un rectangle ABCD tel que AB = 15 et AD = 9,6.
Placer le point P du segment [BC] tel que $\frac{BP}{BC} = \frac{5}{6}$.



M est un point quelconque de [AD] tel que AM < 8 et on pose AM $= x$.
La parallèle à (AB) passant par M coupe [BC] en N et [AP] en K.
On considère trois pyramides de même hauteur [TK] :
P_1 est la pyramide TABCD ; P_2 est la pyramide TAMK et P_3 est la pyramide TPNK.

Partie A

a. On se place dans le triangle ABP où on remarque que BP = 8. Démontrer que AP = 17.

b. Exprimer, en fonction de x, la longueur PN puis la longueur NK.

c. Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle PNK.

d. Montrer que MK $= \frac{15}{8} x$ et en déduire l'aire du triangle AMK en fonction de x.

e. Déterminer x pour que l'aire du triangle AMK soit égale à l'aire du rectangle ABCD divisée par 15.

f. Les triangles AMK et PNK peuvent-ils avoir la même aire ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?

Partie B : On donne TK = 10 cm.

a. Calculer le volume V_1 de P_1.

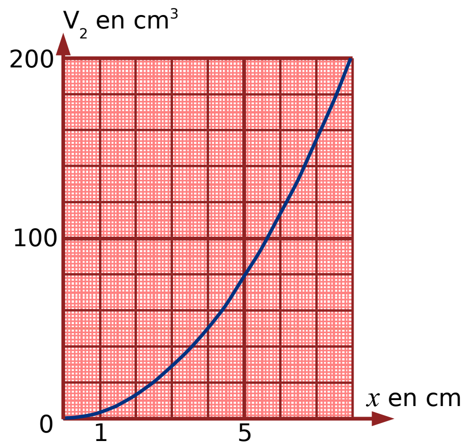
b. Exprimer en fonction de x le volume $V_2(x)$ en cm³ de P_2.

c. Pour quelle valeur exacte de x a-t-on $36\,V_2 = V_1$?

d. Déterminer par lecture graphique :

- l'image de 6 par V_2 ;
- l'antécédent de 50 par V_2.

e. Retrouver les résultats précédents par des calculs.



35 *Fonction, équations (vers la seconde)*

Dans un triangle RST rectangle en R, on donne RS = 6 et RT = 5 (l'unité est le centimètre).
M est un point de [RS], la parallèle à [RT] passant par M coupe [ST] en N et la parallèle à [RS] passant par N coupe [RT] en P, formant ainsi un rectangle RMNP.
On pose RM $= x$ (x est un nombre compris entre 0 et 6).

a. Faire une figure pour $x = 2$ puis calculer l'aire du rectangle RMNP.

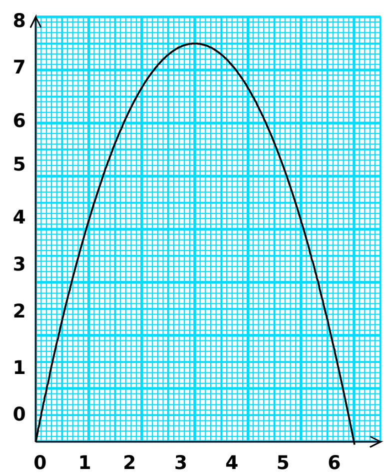
b. Exprimer MN en fonction de x et en déduire l'aire A du rectangle RMNP en fonction de x.

c. Calculer x pour que l'aire A du rectangle RMNP soit égale à la moitié de celle du triangle RST.

d. Pour la valeur de x trouvée à la question précédente, où se trouve le point M ?

e. On a représenté ci-contre l'aire A en fonction de x.
Déterminer graphiquement :

- le (ou les) antécédent(s) de $\frac{25}{6}$;
- la valeur maximale prise par l'aire A ;
- la valeur de x correspondant à ce maximum.



f. Que vaut l'aire du triangle RST lorsque A est maximale ?

g. Reproduire cette courbe à partir d'un tableur.