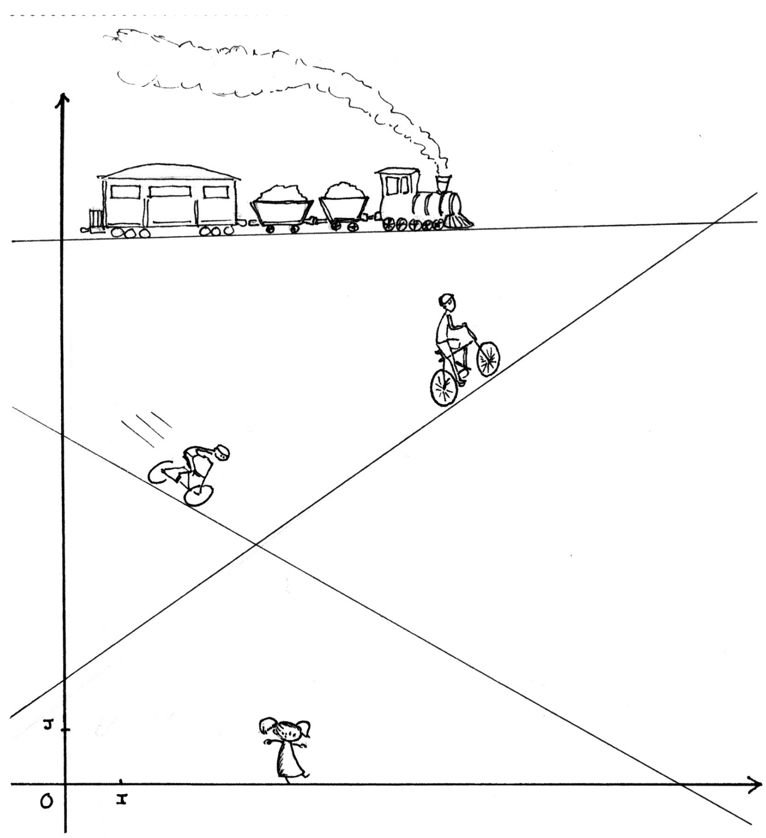
N8

Fonctions linéaires et affines



Série 1 : Généralités

Série 2 : Représentations graphiques

Série 3 : Déterminer une fonction linéaire ou affine

Série 4 : Synthèse

Le cours avec les aides animées

Q1. a et b étant des nombres donnés, comment appelle-t-on les fonctions du type $x \longmapsto a \times x + b$? (Pense au cas particulier où $b = 0$.)

Q2. f est une fonction, r et s sont des nombres donnés et $f(r) = s$: que peut-on dire de s pour r ? De r pour s ?

Les exercices d'application

1 *Reconnaître (1)*

a. $f(x) = 4x - 3$; la fonction f est-elle affine ?

$4x - 3 = \ldots\ldots \times x + \ldots\ldots$ donc ....

....

b. $g : x \longmapsto 5 - 2x$; la fonction g est-elle affine ?

$5 - 2x = \ldots\ldots \times x + \ldots\ldots$ donc ....

....

c. $h(x) = 4{,}5x$; la fonction h est-elle affine ?

$4{,}5x = \ldots\ldots \times x + \ldots\ldots$ donc ....

....

d. $k : x \longmapsto 3x^2 + 5$; la fonction k est-elle affine ?

....

....

e. $l : x \longmapsto -4$; que peux-tu dire de la fonction l ?

....

....

2 *Reconnaître (2)*

Indique si la fonction est affine. Justifie ta réponse.

a. La fonction qui, à un nombre, associe le résultat du programme de calcul : « Choisir un nombre ; lui ajouter 1 puis multiplier le tout par 3 ; annoncer le résultat. ».

....

....

b. La fonction par laquelle la longueur du rayon d'un cercle a pour image le périmètre de ce cercle.

....

....

c. La fonction qui, à la longueur du rayon d'un disque, associe l'aire de ce disque.

....

....

3 *Proportionnalité*

Le prix d'un kilogramme de pommes est 1,50 €.

On considère la fonction f par laquelle une masse de pommes a pour image son prix.

a. Donne une expression de f.

x étant un nombre, $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

b. Quelle est la nature de cette fonction f ?

....

c. Calcule l'image de 10 par f et interprète le résultat par rapport à la situation.

....

....

d. Détermine l'antécédent de 4,5 par f et interprète le résultat par rapport à la situation.

On cherche la valeur de x pour laquelle $f(x) = \ldots\ldots$.

Or $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc on doit résoudre l'équation

....

....

e. Justifie l'égalité $f(3) + f(7) = f(10)$ par le calcul et interprète-la par rapport à la situation.

....

....

....

f. Même question avec l'égalité $f(20) = 2 \times f(10)$.

....

....

....

g. Quelle est l'image de -6 par f ? Peux-tu interpréter ce résultat par rapport à la situation ?

....

....

4 *Tableau de valeurs (1)*

g est une fonction linéaire de coefficient -5.

a. Complète le tableau de valeurs.

x	-3	$-0{,}5$			5		10
$g(x)$			0,5	0		-18	

b. Que peux-tu dire de ce tableau ? Justifie.

....

....

....

....

5 *Possible ?*

a. k est une fonction linéaire telle que $k(4) = 3$. Est-il possible que $k(-8) = -5$? Justifie.

....

....

b. s est une fonction linéaire telle que $s(0) = 5$. Qu'en penses-tu ?

....

....

6 *Avec une fonction affine*

On considère la fonction $f : x \longmapsto -3x + 7$.

a. Calcule $f(5)$. Écris deux phrases, l'une utilisant le mot « image », l'autre le mot « antécédent ».

....

....

....

b. Quelle est l'image de 0 ? Justifie.

....

....

c. Détermine l'antécédent de 2.

On cherche la valeur de x telle que $f(x) =$ ......

Or $f(x) =$ .....x + ... Donc l'antécédent de 2 est solution de l'équation ....

....

....

d. Détermine l'antécédent de -7.

....

....

....

....

7 *Tableau de valeurs (2)*

g est la fonction définie par $g(x) = 2x - 5$.

a. Complète le tableau de valeurs. (Tu peux utiliser un brouillon pour les calculs.)

x	$-5,5$	-3		0		15	
$g(x)$			0		5		2,1

b. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie.

....

....

8 *Accroissements*

Soit h la fonction affine qui, à un nombre x, associe le nombre $7x + 3$.

a. Calcule les rapports suivants.

$\dfrac{h(3) - h(2)}{3 - 2} =$ ....

$\dfrac{h(9) - h(3)}{9 - 3} =$ ....

$\dfrac{h(5) - h(-1)}{5 - (-1)} =$ ....

$\dfrac{h(-3) - h(4)}{-3 - 4} =$ ....

b. Complète les phrases suivantes.

- Lorsque x augmente de 1, $h(x)$ augmente de ....
- Lorsque x augmente de 3, $h(x)$ augmente de ....
- Lorsque la différence de deux nombres est -2, la différence de leurs images par la fonction h est ....

9 *Tarif*

Une agence de location de voitures propose le tarif suivant : un forfait de 100 € auquel s'ajoute 0,70 € par kilomètre parcouru.

a. Calcule le prix à payer pour 240 km parcourus.

....

b. Avec un budget de 500 €, combien de kilomètres pourrait-on parcourir ?

....

....

c. Si l'on parcourt d km, exprime en fonction de d le prix à payer p en euros.

....

d. On considère la fonction f telle que $f(d) = p$ où p € est le prix payé pour d km parcourus.
Donne une expression de f ainsi que sa nature.

x étant un nombre, $f(x) =$ ....

....

e. Traduis les réponses des questions **a.** et **b.** en utilisant la fonction f et les mots « image » et « antécédent ».

....

....

....

Le cours avec les aides animées

Q1. Quelle est la représentation graphique d'une fonction linéaire ? Quelle est celle d'une fonction affine ?

Q2. Quelle relation lie les coordonnées des points de la représentation graphique d'une fonction ?

Q3. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des représentations graphiques des fonctions linéaires et affines avec l'axe des ordonnées ?

Les exercices d'application

1 *Représenter une fonction linéaire*

On veut tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 4x$, dans un repère orthogonal.

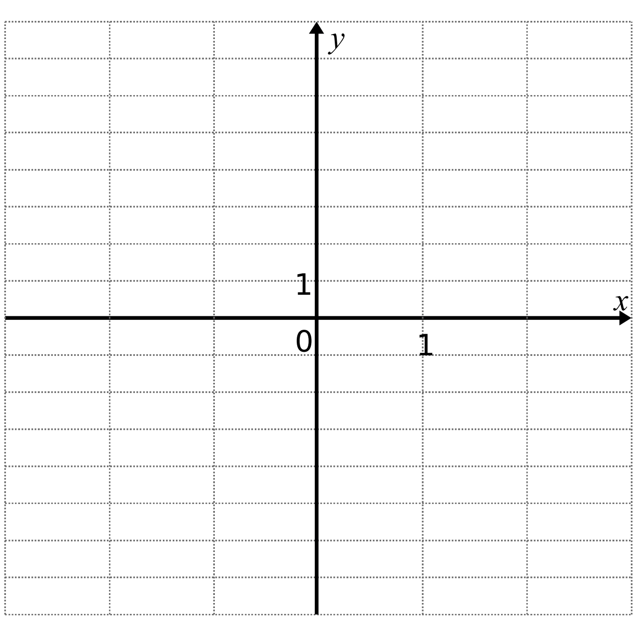
Pour cela, complète le texte suivant, puis utilise le repère ci-dessous.

La représentation graphique d'une fonction ....
.... est ....
....
Pour la tracer , il suffit de connaître ....
....
....

Complète le tableau suivant.

x		
$f(x)$		
Coordonnées de points de la représentation graphique	(...... ; ......)	(...... ; ......)

Place ci-dessous les points obtenus et trace la représentation graphique de f.



2 *Représenter une fonction affine*

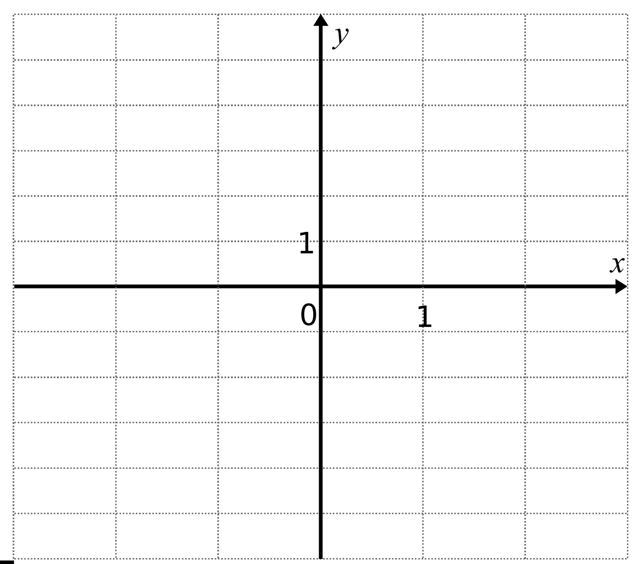
Dans le repère ci-dessous, trace la représentation graphique de la fonction $g : x \longmapsto 3x - 4$.

La fonction g est une fonction ....
Sa représentation graphique est ....
Pour la tracer, il suffit de connaître ....
....
....

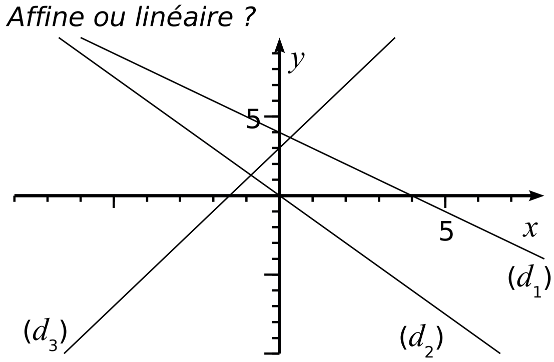
Complète le tableau suivant.

x		
$g(x)$		
Coordonnées de points de la représentation graphique	(...... ; ......)	(...... ; ......)

Place les points dans le repère ci-dessous et trace la représentation graphique de la fonction g.



3 *Affine ou linéaire ?*

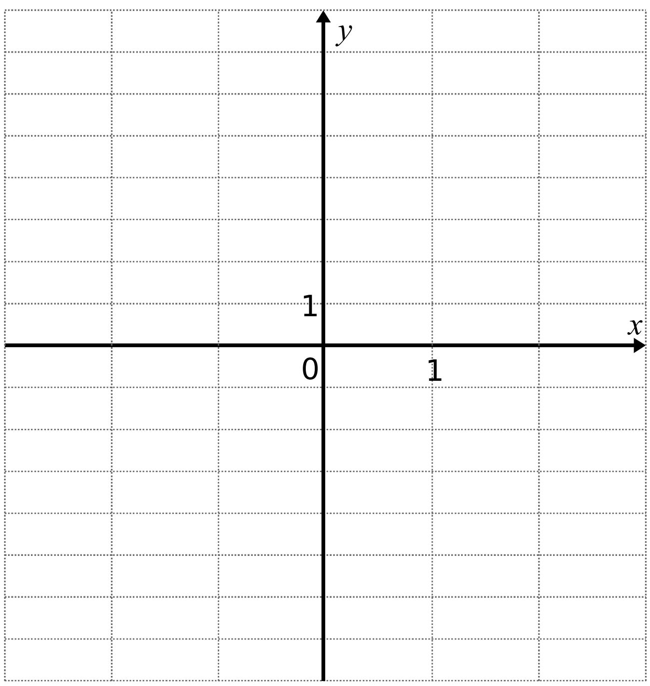


Droite	Nature de la fonction représentée	Signe du coefficient directeur	Ordonnée à l'origine

4 *Sans filet*

a. Trace les représentations graphiques des fonctions suivantes en utilisant le repère ci-dessous : $h : x \longmapsto 3x - 1$ et $l : x \longmapsto -2x$.

....
....
....
....
....
....
....



b. Détermine graphiquement puis par le calcul l'image de $-0{,}5$ par la fonction l.

....
....

c. Détermine graphiquement puis par le calcul l'antécédent de 3 par la fonction h.

....
....

d. Résous l'équation $h(x) = l(x)$. À quoi correspond la solution de cette équation sur le graphique ?

....
....
....
....
....
....

5 *Au cinéma*

La séance de cinéma coûte 9 €. Avec une carte d'abonnement annuelle à 18 €, la séance coûte alors 5 €.

a. Si l'on va voir n séances, exprime en fonction de n, le prix à payer au plein tarif et le prix à payer avec la carte d'abonnement (y compris la carte !).

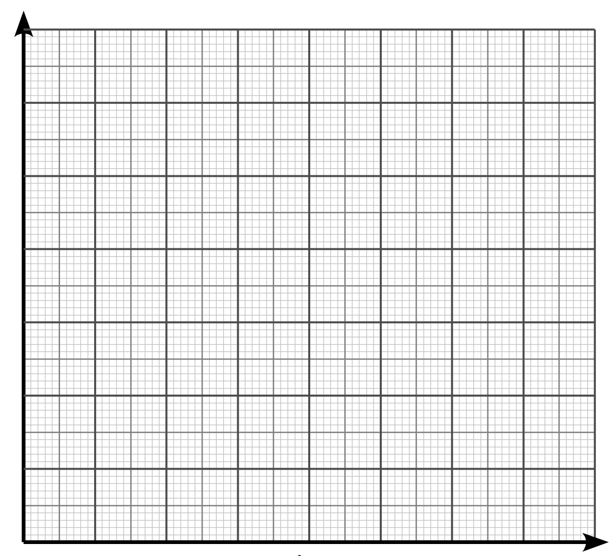
....

b. On considère p la fonction qui associe au nombre de séances, le prix à payer au plein tarif et a la fonction qui associe au nombre de séances, le prix à payer avec la carte d'abonnement. Complète :

x étant un nombre, $p(x)$ = ... et $a(x)$ = ...

c. Représente ces deux fonctions ci-dessous.

....
....



d. Calcule les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Interprète ces coordonnées.

....
....
....
....

e. Résous graphiquement l'inéquation $p(x) > a(x)$.

À partir de l'abscisse ...., la droite .... est en-dessous de la droite .... Les solutions de l'inéquation sont donc ....
....

f. Déduis-en le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de séances.

....
....

Le cours avec les aides animées

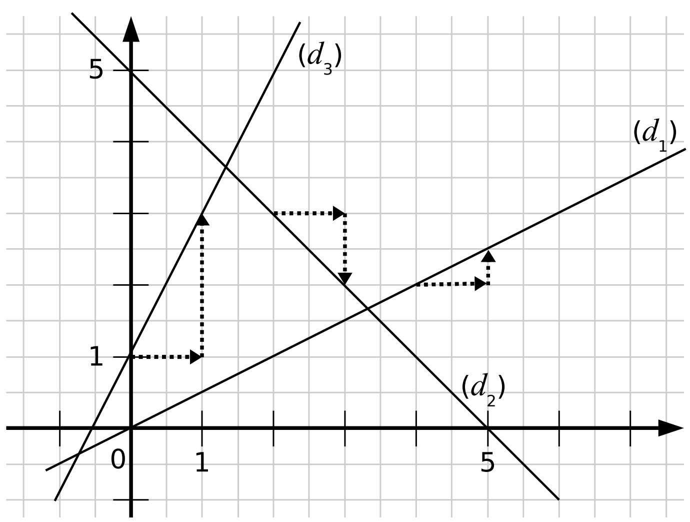
Q1. Comment fait-on pour lire sur un graphique l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique d'une fonction affine ?

Q2. Connaissant l'image de deux nombres par une fonction affine, quel calcul permet de trouver le coefficient directeur de la représentation graphique de cette fonction ?

Les exercices d'application

1 *Détermination graphique de l'expression d'une fonction affine ou linéaire*

Ci-dessous, les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont les représentations graphiques respectives de trois fonctions f, g et h.



a. En utilisant le graphique, détermine l'expression de la fonction f.

La représentation graphique de la fonction f est une .... passant par .... du repère ainsi la fonction f est ....

Son expression est de la forme $f(x)$ = ...

Lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de ..... , donc le coefficient directeur de la droite est ....

Ainsi $f(x)$ = ...

b. Même question pour la fonction g.

La représentation graphique de la fonction g est une ....

Donc la fonction g est ....

Son expression est de la forme $g(x)$ = ...

On lit graphiquement l'ordonnée à l'origine : ....

Lorsque x augmente de ..... , $g(x)$ diminue de ..... , donc le coefficient directeur de la droite est ....

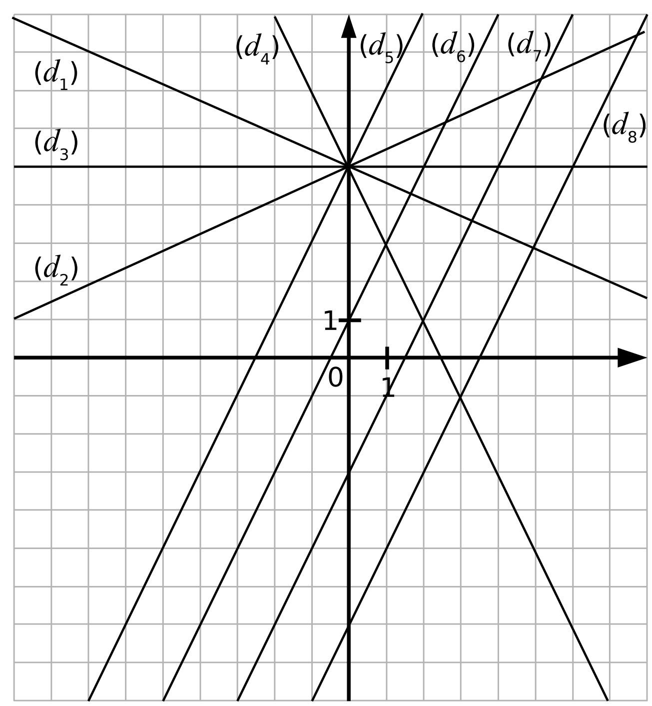
D'où $g(x)$ = ...

c. De la même façon, détermine l'expression de la fonction h.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

2 *À toi de jouer*

Le graphique ci-dessous comporte huit droites représentant des fonctions affines.



Par lecture graphique, en considérant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur des droites représentées ci-dessus, indique pour chaque fonction la droite qui est sa représentation graphique.

Fonction	Droite	Fonction	Droite
$x \longmapsto 2x + 1$	$(d_{......})$	$x \longmapsto 2x - 3$	$(d_{......})$
$x \longmapsto \dfrac{4}{9}x + 5$	$(d_{......})$	$x \longmapsto 2x - 7$	$(d_{......})$
$x \longmapsto -2x + 5$	$(d_{......})$	$x \longmapsto -\dfrac{3}{7}x + 5$	$(d_{......})$
$x \longmapsto 5$	$(d_{......})$	$x \longmapsto 2x + 5$	$(d_{......})$

3 *Détermination d'une fonction linéaire*

a. f est une fonction linéaire telle que $f(5) = 12$. Détermine une expression de f.

L'expression de f est de la forme $f(x) =$ ......, où a est le coefficient directeur de la représentation graphique de f.

$f(5) =$ ..... $\times$ ..... ; or, $f(5) = 12$ donc a est solution de l'équation ....

....

Finalement $f(x) =$ ....

b. Détermine les expressions des fonctions linéaires g et h définies par $g(-2) = -6$ et $h(7) = -9$.

....

....

....

....

....

4 *Déterminer une fonction affine (1re méthode)*

g est une fonction affine telle que $g(7) = 5$ et $g(-3) = 6$. Détermine l'expression de g.

L'expression de g est de la forme $g(x) =$ ...., où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de g.

$g(7) =$ .... $\times$ .... + ... ; or, $g(7) = 5$ donc $(a ; b)$ est solution de l'équation ....

$g(-3) =$ .... $\times$ .... + ... ; or, $g(-3) = 6$ donc ....

....

Ainsi $(a ; b)$ est solution du système :

....

....

Résous ce système.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Finalement, l'expression de la fonction g est $g(x) =$ ....

5 *À toi de jouer*

h est une fonction affine telle que $h(2) = -1$ et $h(-1) = 2$. Détermine son expression.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Finalement, $h(x) =$ ....

6 *Déterminer une fonction affine (2e méthode)*

a. f est une fonction affine telle que $f(4) = 11$ et $f(6) = 8$.

L'expression de f est de la forme $f(x) =$ ...., où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de f.

$a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ donc $a = \dfrac{\text{......} - \text{......}}{\text{......} - \text{......}} = \dfrac{\text{......}}{\text{......}}$.

Ainsi $f(x) =$ ....$x + b$. Il reste à calculer b.

On sait que $f(.....) =$ ..... ; or $f(.....) =$ ..... $\times$ ..... + b, donc b est solution de ....

....

Donc l'expression de la fonction f est $f(x) =$ ....

b. g est une fonction affine telle que $g(-3) = 4$ et $g(5) = 9$. Détermine son expression.

....

....

....

....

....

....

....

....

Le cours avec les aides animées

Q. Si deux droites (d) et (d') représentant deux fonctions affines f et g sont sécantes, à quoi correspond le point d'intersection des droites (d) et (d') pour les fonctions f et g ?

Les exercices d'application

1 *Remise*

Durant les soldes, un magasin pratique une remise de 15 % sur tous les articles.

a. Un article coûtait 28 € avant les soldes. Quel est son nouveau prix ?

On calcule la remise effectuée sur cet article.

....

....

On calcule le nouveau prix de cet article.

....

....

b. On appelle p la fonction qui, au prix de départ, associe le prix soldé. Donne son expression.

On peut supposer que x représente le prix de départ : on exprime la réduction en fonction de x.

....

....

On exprime le nouveau prix $p(x)$ en fonction de x, en donnant une expression simplifiée.

....

....

c. Un article coûtait 45 € avant les soldes. Quel est son prix soldé ?

Chercher le prix soldé d'un article coûtant 45 € revient à chercher l'image de 45 par la fonction p c'est-à-dire $p(45)$.

$p(45)$ = ...

....

d. Un article est soldé à 31,79 €. Quel était son prix avant les soldes ?

Chercher le prix de départ d'un article soldé à 31,79 € revient à chercher .... de 31,79 par p c'est-à-dire résoudre .... = 31,79.

....

....

....

2 *En bus*

Dans une ville, une société de transport en commun propose les tarifs suivants.

Tarif 1 : ticket ordinaire coûtant 0,80 € par trajet.

Tarif 2 : abonnement mensuel de 10 € et tarif réduit à 0,40 € par trajet.

a. Complète le tableau.

Nombre mensuel de trajets	0	5	10	20	30
Coût en euros avec le tarif 1					
Coût en euros avec le tarif 2					

b. n désigne un nombre de trajets effectués en un mois. Exprime, en fonction de n, le prix $c_1(n)$ payé avec le tarif 1 et le prix $c_2(n)$ payé avec le tarif 2 pour ces n trajets.

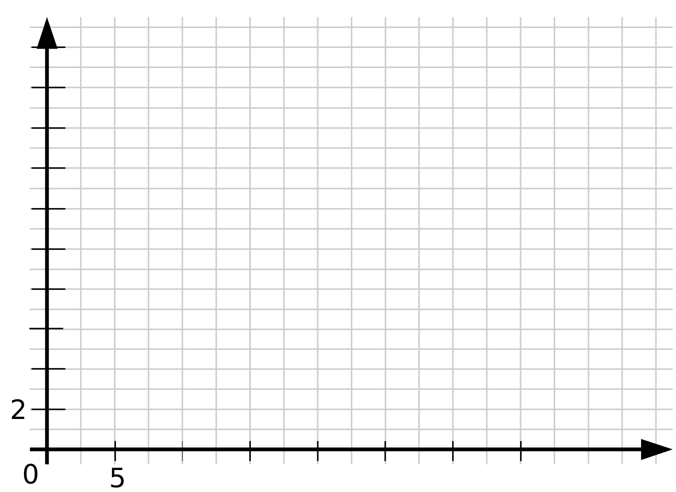
$c_1(n)$ = ... ; $c_2(n)$ = ...

c. Déduis-en l'expression de chacune des fonctions c_1 et c_2.

x désignant un nombre :

$c_1(x)$ = ... ; $c_2(x)$ = ...

d. Représente ci-dessous les fonctions c_1 et c_2.



e. Détermine le nombre de trajets à partir duquel il est préférable de choisir le tarif 2.

Il est préférable de choisir le tarif 2 pour un nombre de trajets n vérifiant $c_2(n)$ .... $c_1(n)$. Donc, n est solution de l'inéquation : ....

....

....

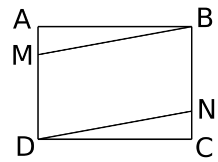
....

f. Comment retrouves-tu le résultat précédent sur le graphique ?

....

....

3 *Comparaison d'aires*



ABCD est un rectangle,
AB = 8 cm et AD = 6 cm.
M est un point du segment [AD].
La droite parallèle à (MB) passant par le point D coupe le segment [BC] en N.
On pose AM = l.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour l ? Justifie.

....

b. Exprime l'aire du triangle ABM en fonction de l.

Aire$_{ABM}$ = ...

c. Quelle est la nature du quadrilatère DMBN ? Justifie.

....

....

....

d. Démontre que l'aire du quadrilatère DMBN est égale à $48 - 8l$.

....

....

e. Représente graphiquement les fonctions f et g définies par $f(x) = 4x$ et $g(x) = 48 - 8x$ pour x compris entre 0 et 6 ; écris les calculs nécessaires.

....

....

f. Lis sur le graphique les coordonnées du point d'intersection des deux représentations puis confirme-les par le calcul.

....

....

....

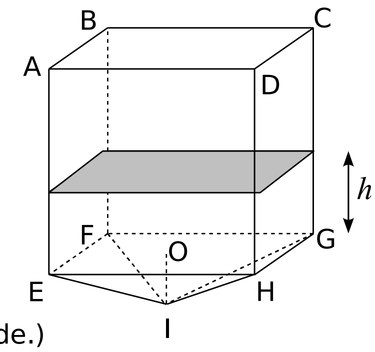
g. Interprète les coordonnées de ce point ainsi que le graphique.

....

....

....

4 *Extrait du Brevet*



Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle.
AB = BC = 2 m ;
AE = 5 m ;
OI = 1,5 m. (OI est la hauteur de la pyramide.)

<u>Première partie</u>

a. Calculer le volume de la pyramide en m^3.

....

....

b. Calculer le volume du parallélépipède en m^3.

....

....

c. En déduire le volume du réservoir lorsqu'il est plein.

....

....

<u>Deuxième partie</u>

On remplit d'eau ce réservoir. La partie pyramide étant entièrement pleine, on appelle h la hauteur d'eau dans le parallélépipède rectangle.

a. Quelles sont les valeurs de h possibles ? Donner un encadrement de h.

....

b. Exprimer en fonction de h le volume d'eau dans le parallélépipède rectangle.

....

....

c. Montrer que le volume d'eau dans le réservoir peut être donné par la fonction affine V définie par $V(x) = 4x + 2$.

....

....

d. Trouver le volume d'eau dans le réservoir lorsque h vaut 1,8 m. Quel est alors le pourcentage de remplissage du réservoir ? (Arrondir à l'unité.)

....

....

....

....

5 *Appartenance ou non*

On considère la fonction f définie $f(x) = 4x + 3$.

Par le calcul, détermine si les points A(− 2 ; − 5) et B(− 3 ; − 10) appartiennent à la représentation graphique de f.

Pour A(− 2 ; − 5) : on calcule l'image de l'abscisse de A par f c'est-à-dire l'image de ...... par f : f(......) = ...

Donc l'image de l'abscisse de A est égale à .... de A.

Ainsi, A .... à la représentation graphique de f.

Pour B(− 3 ; − 10) : ....
....
....
....
....

6 *Points alignés*

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une fonction affine g passe par les points A(2 ; 4) et B(− 3 ; − 11).

Par le calcul, détermine si le point C(6 ; 16) appartient à la droite (AB).

- On détermine une expression de la fonction g.

g est une fonction affine donc une expression de g est de la forme $g(x)$ = ...

La représentation graphique de g passe par le point A(2 ; 4) donc g(........) = ...

La représentation de g passe aussi par le point B(− 3 ; − 11) donc g(........) = ...
....
....
....
....
....
....
....

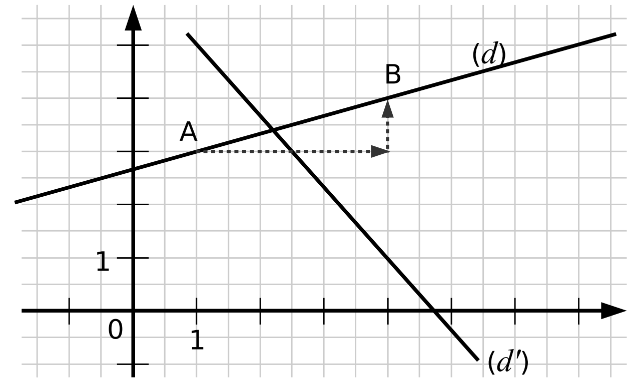
On en déduit que $g(x)$ = ...x + ...

- On calcule l'image de l'abscisse de C par g.

....

- On conclut que ....
....
....

7 *Détermination graphique*



a. La droite (d) est la représentation graphique d'une fonction f. On veut déterminer son expression.

La représentation graphique de f est une ...., donc f est une fonction .... Donc une expression de f est de la forme $f(x)$ = ... où a est .... de (d) et b son ....

- Grâce aux points A et B, détermine a.

....
....

- Peut-on trouver par simple lecture graphique la valeur de l'ordonnée à l'origine ?

....
....

- Calcule l'ordonnée à l'origine b de (d) en te servant des coordonnées d'un point bien choisi.

....
....
....
....
....

D'où $f(x)$ = ...

b. La droite (d') est la représentation graphique d'une fonction g. Détermine une expression de g.

....
....
....
....
....
....
....
....