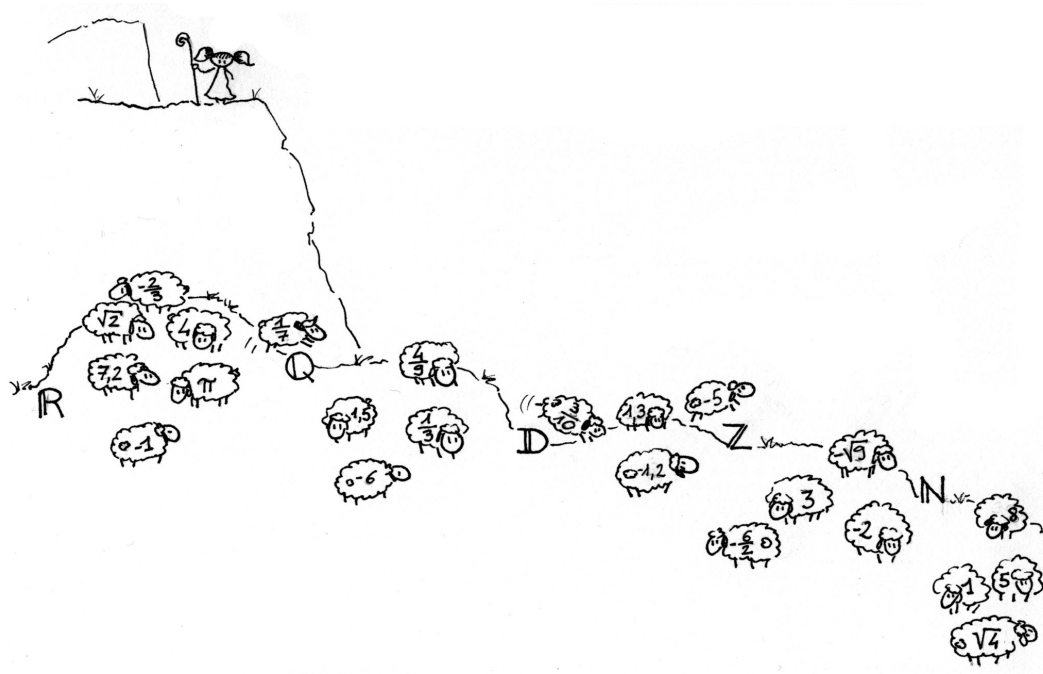


Nombres entiers et rationnels



Série 1 : Diviseurs communs, PGCD

Série 2 : Calculs de PGCD

Série 3 : Problèmes

Série 4 : Simplifier une fraction

Série 5 : Opérations avec des écritures fractionnaires

Le cours avec les aides animées

Q1. Comment reconnaît-on un nombre divisible par 2 ? Par 3 ? Par 4 ? Par 5 ? Par 9 ?

Q2. Qu'est-ce que le PGCD de deux entiers naturels ?

Les exercices d'application

1 Vocabulaire

Complète chaque phrase avec un des mots suivants : diviseur, multiple, divisible.

- 12 est un de 6.
- 3 est un de 18.
- 230 est par 10.

2 Critères de divisibilité

Indique si 2, 3, 4, 5, 9 et 10 sont, oui ou non, des diviseurs des nombres donnés.

	2	3	4	5	9	10
7 440						
7 848						
7 455						

3 Autres diviseurs

Indique si 6, 8, 12, 15, 20 et 32 sont, oui ou non, des diviseurs des nombres donnés.

	6	8	12	15	20	32
4 632						
25 200						
54 208						

4 Diviseurs communs (1)

On veut trouver les diviseurs communs à 40 et 125.

- Écris tous les produits de deux entiers naturels dont le résultat est 40 :
- Les diviseurs de 40 sont donc :
- Écris tous les produits de deux entiers naturels dont le résultat est 125 :
- Les diviseurs de 125 sont donc :
- Donc les diviseurs communs à 40 et 125 sont :

5 Diviseurs communs (2)

a. Diviseurs communs à 72 et 136.

- Détermine tous les diviseurs de 72.

.....
.....

Les diviseurs de 72 sont

.....

- Détermine tous les diviseurs de 136.

.....
.....

- Dédus-en les diviseurs communs à 72 et 136.

.....

b. Trouve les diviseurs communs à 45 et 49.

.....
.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6 PGCD (1)

On veut déterminer le PGCD de 42 et 90.

- Détermine tous les diviseurs de 42.

.....
.....

.....

.....

- Détermine tous les diviseurs de 90.

.....
.....

.....

.....

- Écris les diviseurs communs à 42 et 90.

.....

- Le plus grand des diviseurs communs à 42 et 90 est On note :

PGCD (42 ; 90) = ou PGCD (90 ; 42) =

7 PGCD (2)

Détermine les diviseurs communs à 75 et 180 puis le PGCD de ces deux nombres.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8 PGCD : un cas particulier

a. 14 est-il un diviseur de 42 ?

.....

b. 14 est-il un diviseur commun à 14 et 42 ?

.....

c. Peut-il y avoir un diviseur commun à 14 et 42 plus grand que 14 ?

.....

On peut donc en déduire : PGCD (14 ; 42) =

d. Complète en justifiant.

25 125 donc PGCD (125 ; 25) =

..... donc PGCD (48 ; 240) =

9 Nombres premiers entre eux (1)

36 et 55 sont-ils premiers entre eux ?

- On détermine les diviseurs de 36.

.....

.....

.....

- On détermine les diviseurs de 55.

.....

.....

.....

- On en déduit les diviseurs communs à 36 et 55.

.....

- On en déduit que : PGCD (36 ; 55) =

- Le PGCD de 36 et 55 est égal à

donc 36 et 55 sont

10 Nombres premiers entre eux (2)

a. Détermine les diviseurs communs à 105 et 182 et déduis-en si ces nombres sont premiers entre eux ou non.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b. 19 et 56 sont-ils premiers entre eux ? Justifie.

.....

.....

.....

.....

.....

11 Nombres non premiers entre eux

On veut justifier que les entiers donnés ne sont pas premiers entre eux sans calculer leur PGCD.

a. 135 et 120

- est un diviseur commun à 135 et 120

car

Ainsi PGCD (135 ; 120) 1.

- Donc 135 et 120

b. 46 et 124

- Donne un diviseur commun évident à 46 et 124. Justifie.

.....

.....

- Conclus.

.....

.....

c. 114 et 63

.....

.....

.....

.....

Le cours avec les aides animées

Q1. Comment calcule-t-on le PGCD de deux entiers naturels avec la méthode des soustractions successives ?

Q2. Comment calcule-t-on le PGCD de deux entiers naturels avec la méthode des divisions successives ?

Les exercices d'application

1 Méthode des soustractions successives (1)

On veut calculer le PGCD de 147 et 63 à l'aide de la méthode des soustractions successives.

• $147 > 63$

On calcule la différence de 147 et 63 :

$147 - 63 = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(147 ; 63) = \text{PGCD}(63 ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$

On calcule la différence de $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$:

$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(147 ; 63) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$

On calcule la différence de $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$:

$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(147 ; 63) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$

On calcule la différence de $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$:

$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(147 ; 63) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$.

2 Méthode des soustractions successives (2)

On veut calculer le PGCD de 231 et 561 à l'aide de la méthode des soustractions successives.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

• $\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

donc $\text{PGCD}(231 ; 561) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$;

soit $\text{PGCD}(231 ; 561) = \dots\dots\dots$.

3 Méthode des soustractions successives (3)

On veut calculer le PGCD de 616 et 168 à l'aide de la méthode des soustractions successives et présenter les résultats dans un tableau.

Dans la colonne Différence, on écrit la différence de a et b avec $a > b$.

Effectue les calculs et complète le tableau.

a avec $a > b$	b	Différence
616	168	

Conclusion :

$\text{PGCD}(616 ; 168) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$.

4 Méthode des divisions successives (1)

On veut calculer le PGCD de 1 659 et 392 à l'aide de la méthode des divisions successives.

$\dots\dots\dots > \dots\dots\dots$

On effectue la division euclidienne de 1 659 par 392 :

$$1\ 659 = 392 \times \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Le reste de la division euclidienne de 1 659 par 392 est $\dots\dots\dots$.

Donc $\text{PGCD}(1\ 659 ; 392) = \text{PGCD}(392 ; \dots\dots\dots)$.

On effectue la division euclidienne de 392 par $\dots\dots\dots$:

$$392 = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Le reste de la division euclidienne de 392 par $\dots\dots\dots$ est $\dots\dots\dots$.

Donc $\text{PGCD}(1\ 659 ; 392) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

On effectue la division euclidienne de $\dots\dots\dots$ par $\dots\dots\dots$:

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Le reste de la division euclidienne de $\dots\dots\dots$ par $\dots\dots\dots$ est $\dots\dots\dots$.

Donc $\text{PGCD}(1\ 659 ; 392) = \text{PGCD}(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.

On effectue la division euclidienne de $\dots\dots\dots$

par $\dots\dots\dots$:

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Le reste de la division euclidienne de $\dots\dots\dots$ par $\dots\dots\dots$ est $\dots\dots\dots$, c'est-à-dire $\dots\dots\dots$ divise $\dots\dots\dots$.

Donc $\text{PGCD}(28 ; 7) = \dots\dots\dots$;

soit $\text{PGCD}(1\ 659 ; 392) = \dots\dots\dots$.

5 Méthode des divisions successives (2)

On veut calculer le PGCD de 2 640 et 34 545 à l'aide de la méthode des divisions successives.

- > et $34\,545 = 2\,640 \times \dots + \dots$
donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (2 640 ;).
- $2\,640 = \dots \times \dots + \dots$
donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (..... ;).
- = $\times$ +
donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (..... ;).
- = $\times$ +
donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (..... ;).
- = $\times$ +
donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (..... ;).
- = $\times$ +
soit divise Donc PGCD (..... ;) =
Alors PGCD (2 640 ; 34 545) =

6 Méthode des divisions successives (3)

On veut calculer le PGCD de 784 et 136 à l'aide de la méthode des divisions successives et présenter les résultats dans un tableau.

Dans la colonne Reste, on écrit le reste de la division euclidienne de a par b (b non nul). Effectue les calculs au brouillon et complète le tableau.

a	b ($b \neq 0$)	Reste
784	136	

Conclusion : PGCD (784 ; 136) =

7 Comparaison

a. Calcule le PGCD de 1 078 et 322 à l'aide de la méthode des divisions successives.

- > et = $\times$ + ;
- = $\times$ + ;
- = $\times$ + ;
- = $\times$ +

Conclusion : PGCD (1 078 ; 322) =

b. En utilisant la méthode des soustractions successives, combien d'opérations aurait-il fallu effectuer ?

.....

8 Méthode au choix

Pour chaque question, utilise la méthode qui te paraît la plus appropriée.

a. Calcule le PGCD de 615 et 75.

J'utilise la méthode

.....
.....
.....
.....

Donc PGCD (615 ; 75) =

b. Calcule le PGCD de 32 et 48.

J'utilise la méthode

.....
.....
.....
.....

Donc PGCD (32 ; 48) =

9 Sans calculs ?

a. Calcule le PGCD de 36 et 72 avec la méthode de ton choix.

J'utilise la méthode

.....
.....

Donc PGCD (36 ; 72) =

b. Pouvais-tu prévoir le résultat ? Pourquoi ?

.....

c. Sans effectuer de calcul, indique le PGCD de :

- 13 et 39 :
car
- 1 100 et 100 :
car

10 Nombres premiers entre eux

En utilisant la méthode de ton choix, montre que 273 et 163 sont premiers entre eux.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Le cours avec les aides animées

Q1. Donne la définition d'un diviseur d'un entier naturel.

Q2. Cite deux méthodes qui permettent de trouver le PGCD de deux nombres entiers.

Les exercices d'application

1 Sacs de billes

Jérémy a 90 billes rouges et 150 billes noires et il souhaite les répartir toutes en paquets. Tous les paquets doivent contenir le même nombre de billes rouges et le même nombre de billes noires. On veut trouver les différentes possibilités pour le nombre de paquets.

a. Peut-il y avoir trente paquets ? Neuf paquets ?

.....

b. Donne la liste des diviseurs de 90.

.....

c. Donne la liste de diviseurs de 150.

.....

d. Quelles sont les différentes possibilités pour le nombre de paquets ?

.....

2 Bonbons

Olivia avait un paquet de 320 bonbons et un paquet de 280 chewing-gums qu'elle a partagés équitablement avec un groupe de personnes. Il lui reste alors 5 bonbons et 10 chewing-gums.

a. On souhaite retrouver le nombre de personnes de ce groupe. Le nombre recherché est un diviseur de deux nombres, lesquels ?

.....

b. Calcule maintenant le nombre maximal de personnes du groupe.

.....

c. Combien de bonbons et de chewing-gums chaque personne aura-t-elle ?

.....

3 Terrasse

a. Calcule le PGCD de 480 et 560.

.....

b. Un artisan souhaite recouvrir une terrasse rectangulaire de 4,8 m de large et de 5,6 m de long à l'aide de dalles carrées identiques sans faire de découpe. Quelle mesure maximale du côté de chaque dalle doit-il choisir ?

4,8 m = cm et 5,6 m = cm.

La mesure du côté, en centimètres, d'une dalle est un de la longueur et de la largeur de la terrasse.

On cherche la dimension maximale d'une dalle.

Alors cette mesure est le

.....

Donc l'artisan doit choisir des dalles de cm de côté.

c. Combien de dalles doit-il acheter ?

Nombre de dalles dans la longueur :

Nombre de dalles dans la largeur :

Nombre de dalles à prévoir :

4 Extrait du Brevet

Pour le 1^{er} mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et de 78 roses.

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

a. Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

.....

b. Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

.....

5 Clôture

Aurélien possède un terrain rectangulaire de dimensions 78 sur 102 mètres qu'il souhaite clôturer. Afin de poser un grillage, il doit planter des poteaux régulièrement espacés et pour simplifier le travail, il veut que la distance entre chaque poteau soit un nombre entier de mètres. De plus, il lui faut un poteau à chaque coin.

a. Deux poteaux peuvent-ils être espacés de cinq mètres ? De trois mètres ?

.....

b. Aurélien veut planter le moins de poteaux possibles. Que peux-tu dire alors de la distance entre deux poteaux ?

.....

c. Dans ce cas, combien doit-il planter de poteaux ?

.....

6 Volumes

a. Calcule le PGCD de 60, 72 et 84.

.....

b. On veut remplir trois cuves d'eau de contenances 60 L, 72 L et 84 L à l'aide d'un récipient. Quelle doit être la plus grande contenance possible de ce récipient de façon à remplir exactement les trois cuves ? Justifie ta réponse.

.....

c. Combien faudra-t-il verser de fois ce récipient dans chacune des cuves pour les remplir à ras bord ?

.....

7 Curiosité

a est un chiffre, on veut démontrer que le nombre $\overline{a00a}$ est divisible par 143. (Pour $a = 4$, le nombre est 4 004.)

a. Vérifie cette affirmation avec $a = 1$ puis avec $a = 2$.

Pour $a = 1$:

Pour $a = 2$:

Que constates-tu sur ces deux exemples ?

.....

b. Complète : $\overline{a00a} = \dots \times 10^{\dots} + \dots \times 1$.

c. Démonstre maintenant l'affirmation dans le cas général.

.....

8 Démonstration (1)

On veut démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

a. Quelle est l'écriture littérale d'un entier naturel impair ?

.....

b. Combien faut-il ajouter à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit ?

.....

c. Donne les écritures littérales de deux entiers naturels impairs consécutifs.

.....

d. Montre que leur somme peut s'écrire $4m$ où m est un entier naturel puis conclus.

.....

9 Démonstration (2)

Démonstre que la différence de deux entiers naturels ayant le même reste dans la division euclidienne par n est un multiple de n .

.....

Le cours avec les aides animées

Q1. Cite les critères de divisibilité que tu connais.

Q2. Quand peut-on simplifier une fraction ?

Q3. Qu'appelle-t-on une fraction irréductible ?

Les exercices d'application

1 Irréductible ?

Les fractions suivantes sont-elles irréductibles ? Justifie ta réponse.

a. $\frac{4}{6}$ d. $\frac{1}{82}$

b. $\frac{3}{19}$ e. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{15}{30}$ f. $\frac{42}{39}$

2 On divise

a. On veut simplifier au maximum $\frac{385}{165}$.

Quel diviseur commun évident ont 385 et 165 ?

Donc $\frac{385}{165} = \frac{385 \div \dots}{165 \div \dots} = \frac{\dots}{\dots}$.

Quel diviseur commun évident ont le numérateur et le dénominateur de la fraction obtenue ?

Continue la simplification :

La fraction obtenue est-elle irréductible ?

Donc $\frac{385}{165} = \frac{\dots}{\dots}$.

b. Procède de la même façon pour simplifier :

$$\frac{42}{56}$$

$$\frac{153}{189}$$

3 Facteurs égaux

Complète les égalités. (Dans chaque cas, la fraction de droite doit être irréductible.)

a. $\frac{2 \times \dots}{\dots \times 24} = \frac{2}{7}$

c. $\frac{8 \times \dots \times 11}{\dots \times 5 \times \dots} = \frac{\dots}{9}$

b. $\frac{2 \times \dots}{\dots \times 5} = \frac{10}{3}$

d. $\frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{2 \times 3^3 \times 5^2} = \frac{\dots}{\dots}$

4 En décomposant

a. Écris au brouillon 504 et 540 sous forme de produits de facteurs entiers les plus petits possibles.

b. Utilise ces décompositions pour rendre irréductible la fraction $\frac{504}{540}$.

$$\frac{504}{540} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

5 Avec le PGCD

a. Calcule le PGCD de 1 204 et 258.

b. Rends la fraction $\frac{1\,204}{258}$ irréductible en effectuant une seule simplification. Justifie ta réponse.

c. Détermine le PGCD de 274 et 547 puis rends la fraction $\frac{274}{547}$ irréductible.

6 Avec la meilleure méthode

Rends les fractions suivantes irréductibles.

$$\frac{120}{90} \quad \frac{225}{375}$$

$$\frac{129}{86} \quad \frac{2\,278}{2\,814}$$

Le cours avec les aides animées

Q1. Comment additionne-t-on deux nombres en écriture fractionnaire ?

Q2. Comment multiplie-t-on deux nombres en écriture fractionnaire ?

Les exercices d'application

Les résultats devront être exprimés à chaque fois sous forme de fractions irréductibles.

1 Trouver un dénominateur commun (1)

On veut calculer $A = \frac{7}{35} + \frac{8}{15}$.

Pour cela, on va chercher le dénominateur commun à $\frac{7}{35}$ et $\frac{8}{15}$ le plus petit possible.

On écrit les dix premiers multiples de 35 :

.....

On écrit les dix premiers multiples de 15 :

.....

Donc le plus petit dénominateur commun à $\frac{7}{35}$

et $\frac{8}{15}$ est

$$A = \frac{7 \times \dots}{35 \times \dots} + \frac{8 \times \dots}{15 \times \dots}$$

$$A = \frac{7}{\dots} + \frac{8}{\dots} \text{ d'où } A = \frac{\dots}{\dots}$$

On simplifie la fraction obtenue :

.....

$$\text{d'où } A = \frac{\dots}{\dots}$$

2 Trouver un dénominateur commun (2)

Effectue les calculs suivants.

$$B = -\frac{13}{12} + \frac{7}{16}$$

$$C = \frac{11}{26} - \frac{5}{39}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Trouver un dénominateur commun (3)

On veut calculer $D = \frac{7}{11} + \frac{4}{25}$.

On commence par chercher un dénominateur commun à $\frac{7}{11}$ et $\frac{4}{25}$.

On écrit les dix premiers de 11 :

.....

On écrit les dix premiers de 25 :

.....

Que constates-tu ?

.....

Quel dénominateur commun peux-tu alors choisir ?

$$D = \frac{\dots \times \dots}{11 \times \dots} + \frac{\dots \times \dots}{25 \times \dots}$$

$$D = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} \text{ d'où } D = \frac{\dots}{\dots}$$

Simplifie la fraction obtenue si possible.

.....

4 Simplifier avant de multiplier

a. On cherche à calculer $F = \frac{44}{105} \times \frac{42}{66}$.

$$\text{On a } F = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots}$$

Écris chacun des entiers naturels sous la forme d'un produit de facteurs les plus petits possibles.

$$44 = \dots \quad 42 = \dots$$

$$105 = \dots \quad 66 = \dots$$

$$\text{D'où } F = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

b. Sur le même modèle, calcule :

$$\bullet \quad G = \frac{63}{30} \times \frac{45}{28}$$

.....

.....

$$\text{D'où } G = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\bullet \quad H = \frac{24}{35} \times \frac{14}{36}$$

.....

.....

.....

.....

5 On divise

a. On cherche à calculer $J = \frac{72}{175} \div \frac{54}{105}$.

Diviser par un nombre revient à multiplier par son

.....

D'où $J = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

Termine le calcul.

.....

.....

b. Calcule $K = \frac{51}{21} \div \frac{68}{7}$.

.....

.....

6 On mélange

Calcule $L = \frac{40}{48} + \frac{105}{27} \times \frac{90}{56}$.

La est prioritaire sur

.....

Donc on a $L = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots \times \dots\dots}$.

Simplifie puis termine le calcul.

.....

.....

.....

.....

7 Avec des parenthèses

Calcule $M = \left(-\frac{12}{14} + \frac{20}{15}\right) \times \frac{98}{25}$.

On commence par faire les simplifications

nécessaires, d'où $M = \left(-\frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right) \times \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

En présence de, il faut commencer par les calculs

D'où $M = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

8 Fin de mix

Calcule et donne le résultat sous forme de fractions irréductibles.

$$\bullet \quad N = -\frac{14}{30} + \frac{10}{30} \times \frac{28}{8}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\bullet \quad P = \frac{25}{18} - \frac{7}{9} \times \left(-\frac{5}{14} + \frac{8}{21}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9 Extrait du Brevet

a. Les nombres 756 et 441 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

.....

.....

.....

.....

b. La fraction $\frac{756}{441}$ est-elle irréductible ?

Si non, l'écrire sous forme irréductible en justifiant.

.....

.....

c. Calculer la somme $Q = \frac{756}{441} + \frac{19}{42}$ et donner le résultat sous forme irréductible.

.....

.....

.....

.....