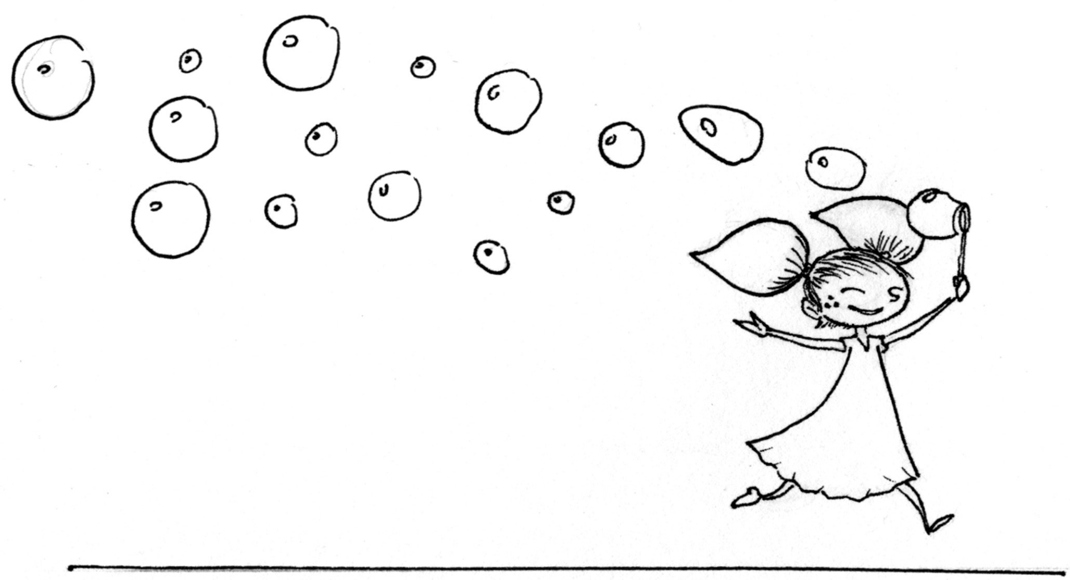
G3

Géométrie dans l'espace



Série 1 : Sphère, boule, définitions

Série 2 : Calculs de volumes

Série 3 : Sections de solides

Série 4 : Agrandissements, réductions

Le cours avec les aides animées

Q1. Donne la définition d'une sphère.

Q2. Quelle est la différence entre une sphère et une boule ?

Les exercices d'application

1 *Appartenir ou ne pas appartenir ?*

On appelle $(\mathcal{S})$ une sphère de rayon 5 cm et de centre O et $(\mathcal{B})$ la boule de même centre et de rayon 3 cm. L, M, N et T sont des points de l'espace tels que OL = 2 cm ; OM = 4,99 cm ; ON = 5 cm et OT = 6 cm.
Complète avec les symboles « $\in$ » ou « $\notin$ » et justifie.

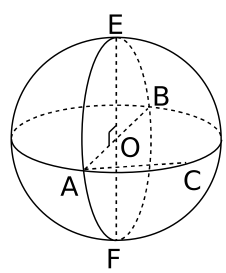
a. L ..... $(\mathcal{S})$ et L ..... $(\mathcal{B})$ car ....

b. M ..... $(\mathcal{S})$ et M ..... $(\mathcal{B})$ car ....

c. N ..... $(\mathcal{S})$ et N ..... $(\mathcal{B})$ car ....

d. T ..... $(\mathcal{S})$ et T ..... $(\mathcal{B})$ car ....

2 *Que de triangles !*



La figure ci-contre représente une sphère de centre O et de rayon 3 cm. [AB] et [EF] sont deux diamètres perpendiculaires et C est un point d'un grand cercle tel que AC = 4 cm.

a. Indique la nature des triangles suivants.

- Le triangle ABC est ....
- Le triangle AOE est ....
- Le triangle BOC est ....
- Le triangle EAF est ....

b. Représente en vraie grandeur le triangle ABC et place le point O.

c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

[AB] est un diamètre de la sphère donc AB = ... Comme C est un point du cercle de diamètre [AB], le triangle ABC est .... en ..... . Donc, on a : .... $\widehat{ABC} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$.

La calculatrice donne $\widehat{ABC} \approx$ ....

3 *Rangement*

Une boîte a une forme de pavé droit dont les dimensions sont 8 cm ; 9 cm et 10 cm.
Peut-on y ranger une boule de 4,5 cm de rayon ?

....

....

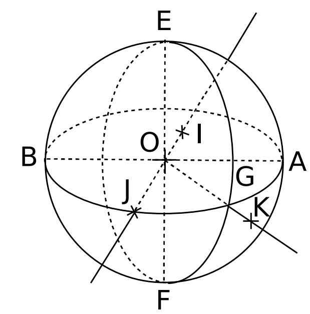
....

....

....

....

4 *Que de segments !*



La figure ci-contre représente une boule de diamètre [AB].

a. Marque en rouge les points qui sont sur la sphère de centre O, de rayon OA et en bleu les points qui sont à l'intérieur de la boule de centre O, de rayon OA.

b. Place sur la figure le point H, diamétralement opposé à G et un point L sur la demi-droite [OG) qui appartienne à la boule de rayon OA.

c. Trace à main levée sur la figure le grand cercle passant par E et J.

d. Pour la boule de rayon OA, nomme :

- des diamètres : .... ;
- des rayons : ....

5 *À main levée*

a. Représente en perspective cavalière à main levée une sphère de centre A et deux de ses grands cercles. Nomme E et I leurs points d'intersection. Trace pour chaque grand cercle un diamètre que tu nommeras respectivement [PS] et [TV].

b. Quelle est la nature du quadrilatère VITE ?

....

....

....

....

Le cours avec les aides animées

Q1. Donne les formules permettant de calculer le volume d'un cube, d'un pavé droit, d'un cylindre, d'une pyramide et d'une boule.

Q2. Donne la formule permettant de calculer la surface d'une sphère de rayon r.

Les exercices d'application

1 *Jeux de plage*

Georges a acheté un ballon gonflable en forme de sphère pour ses enfants. Le diamètre de ce ballon est de 30 cm.

a. Calcule le volume du ballon, arrondi au cm^3.

Le diamètre de ce ballon mesure ....

donc le rayon du ballon est .... cm.

Le volume d'une boule est donné par la formule

V_{boule} = ...

Ici V_{boule} = ...

soit V_{boule} = ... cm^3.

D'où V_{boule} ≈ .... cm^3 (arrondi à l'unité).

a. À chaque expiration, Georges souffle 500 cm^3 d'air dans le ballon. Combien de fois devra-t-il souffler pour le gonfler au maximum ?

....

....

2 *Pétanque*

a. Une boule de pétanque a pour diamètre 72 mm. Calcule le volume de la boule de pétanque, arrondi à l'unité.

Le rayon de la boule est de ....

Le volume de la boule de pétanque est donné par

la formule V = ...

Ici V = ...

soit V = ... mm^3.

D'où V ≈ .... mm^3 (arrondi à l'unité) ;

soit V ≈ .... cm^3.

a. La masse volumique de l'alliage constituant la boule de pétanque est de 3,48 g/cm^3.
Calcule la masse d'une boule de pétanque.

1 cm^3 d'alliage pèse ....

La boule de pétanque a un volume de .... cm^3

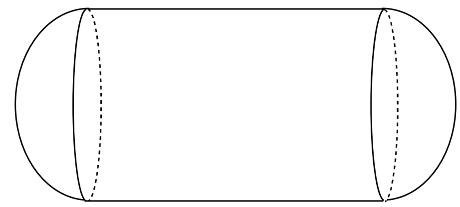
donc sa masse m, en grammes, est donnée par

m = ...

m ≈ .... g (arrondie à l'unité).

3 *Médecine*

Une gélule a la forme d'un cylindre droit de longueur 1 cm avec une demi-sphère collée à chacune de ses bases de rayon 3 mm.



Le but de l'exercice est de calculer le volume de médicament que peut contenir une telle gélule.

a. Reporte sur la figure les longueurs de l'énoncé exprimées en millimètre.

b. Calcule le volume exact du cylindre.

$V_{cylindre}$ = ...

soit $V_{cylindre}$ = ... mm^3.

a. Calcule le volume exact des deux demi-sphères.

$V_{demi\text{-}sphère}$ = ...

Ici $V_{demi\text{-}sphère}$ = ...

soit $V_{demi\text{-}sphère}$ = ... mm^3.

b. Calcule le volume total de la gélule.

$V_{gélule}$ = ... + ...

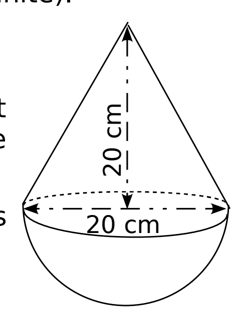
$V_{gélule}$ = ...

$V_{gélule}$ = ... mm^3

$V_{gélule}$ ≈ .... mm^3 (arrondi à l'unité).

4 *Culbuto*

Le culbuto ci-contre est un jouet pour enfant qui oscille sur une base sphérique.



a. Calcule son volume exact puis donne l'arrondi au cm^3.

....

....

....

....

....

....

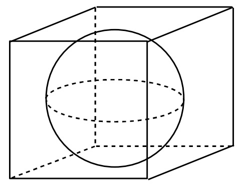
b. La base sphérique est remplie de sable. Quelle proportion du jouet est occupée par le sable ?

....

....

....

5 *Débordement*



Une balle lestée, de 5 cm de rayon, est plongée dans un cube de côté 10 cm rempli d'eau.

a. Calcule le volume du cube.

....

....

....

b. Calcule le volume de la balle lestée.

....

....

....

$V_{balle} \approx$ .... cm^3 (arrondi au dixième).

c. On plonge la balle dans l'eau qui déborde. Calcule le volume d'eau restant dans le cube.

$V_{eau} = V_{cube}$ .... V_{balle}

$V_{eau} \approx$ ....

$V_{eau} \approx$ .... cm^3 (arrondi au dixième).

a. Détermine la hauteur de l'eau dans le cube lorsqu'on retire la balle.

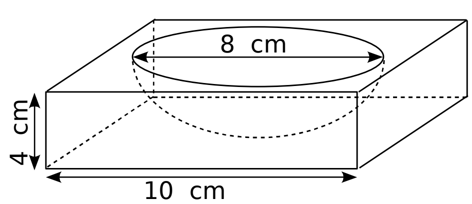
....

....

....

6 *Pâtisserie*

Un moule à gâteau a la forme d'un pavé droit à base carrée dans lequel on a évidé une demi-boule.



a. Calcule le volume de plastique nécessaire pour fabriquer ce moule ; arrondis au centième de cm^3.

....

....

....

....

b. Catherine veut napper son gâteau de chocolat. Détermine la surface de gâteau à recouvrir, arrondie au centième de cm^2.

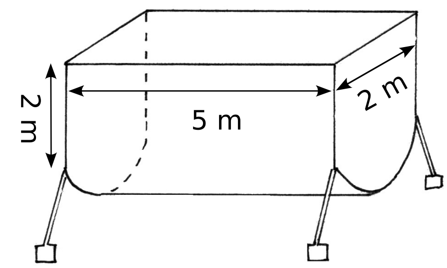
....

....

....

7 *Silo à engrais*

Monsieur Le Gume a entreposé sa réserve d'engrais dans un réservoir.



a. Décompose le silo en deux parties dont tu calculeras le volume exact.

- La partie supérieure a la forme d'un ....

Son volume V_1 est donné par la formule V_1 = ...

Ici V_1 = ... ;

soit V_1 = ... m^3.

- La partie inférieure a la forme d'un ....

Son volume V_2 est donné par la formule V_2 = ...

Le rayon mesure .... et la hauteur mesure ....

Donc V_2 = ... ;

soit V_2 = ... m^3.

b. Calcule le volume du silo.

$V_{silo} = V_1$ ..... V_2

V_{silo} = ...

$V_{silo} \approx$ .... m^3 (arrondi à l'unité).

c. M. Le Gume veut peindre son silo avec une peinture anti-corrosion. Détermine la surface à peindre. (Arrondis à l'unité.)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Le cours avec les aides animées

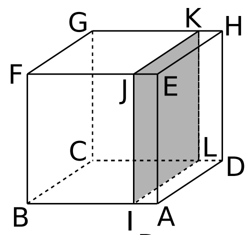
Q1. Quelle est la nature de la section d'un pavé par un plan parallèle à une face ?

Q2. Quelle peut être la nature de la section d'une sphère par un plan ?

Q3. Quelle est la nature de la section d'un cône par un plan parallèle à sa base ?

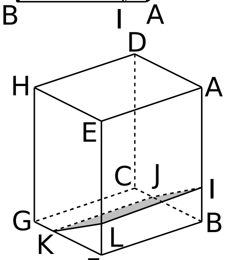
Les exercices d'application

1 *Sections d'un pavé droit (1)*



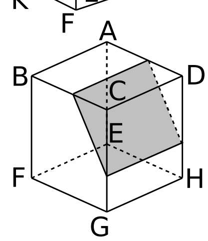
a. On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à la face BCGF.

La section est un ....



b. On a réalisé la section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [DH].

La section est un ....

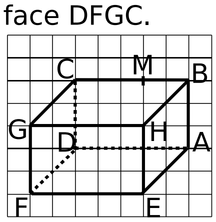


c. On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [EF].

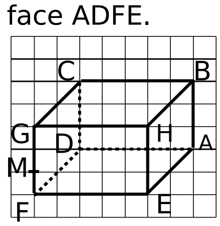
La section est un ....

2 *Avec un quadrillage*

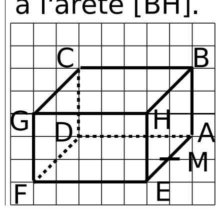
a. Dessine en rouge la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et parallèle à la face DFGC.



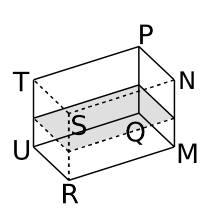
b. Dessine en bleu la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et parallèle à la face ADFE.



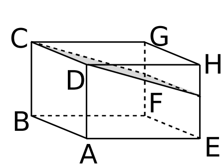
c. Dessine en vert la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et perpendiculaire à l'arête [BH].



3 *Définir la section*



a. Le polygone gris est une section du pavé droit MNPQRSTU par un plan parallèle à ....



b. Le polygone gris est une section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à ....
....

4 *Sections d'un pavé droit (2)*

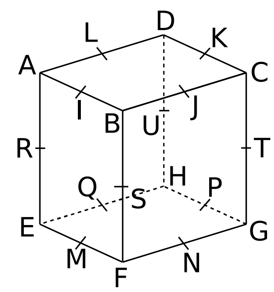
Les points I, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T et U sont les milieux des arêtes du pavé droit ABCDEFGH.

a. Trace en rouge la section du pavé par le plan contenant le point P et parallèle à la face ADHE.

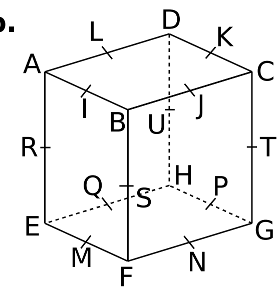
b. Trace en bleu la section du pavé par le plan contenant le point Q et parallèle à l'arête [BF] sans être parallèle au plan ABFE.

c. Trace en vert la section du pavé par le plan contenant le point E et parallèle à l'arête [DC] sans être parallèle aux plans ABFE et EHGF.

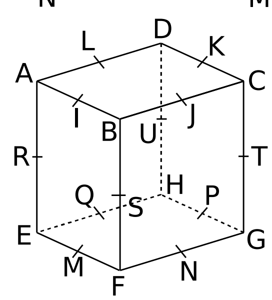
a.



b.

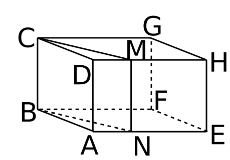


c.



5 *Calculs*

La figure ci-contre représente le pavé droit ABCDEFGH et sa section BCMN.
On donne AB = 5 cm ; BC = 4 cm et AE = 6 cm.



a. Quelle est la nature du quadrilatère BCMN ?

Le quadrilatère BCMN est la .... du pavé par un plan ....
donc BCMN est un ....

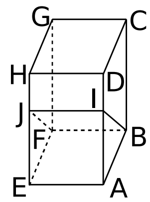
b. Sachant que MD = 2 cm, calcule les dimensions exactes de BCMN.

Le triangle CDM est ....,
donc d'après le ....,
on a .... ;
soit CM^2 = ... = ...
CM > 0 donc CM = ...
Les dimensions exactes du .... BCMN sont .... et ....

c. Calcule l'aire de BCMN arrondie au mm^2.

A_{BCMN} = ... = ...
$A_{BCMN} \approx$ .... cm^2.

6 *Construction*



ABCDEFGH est un pavé droit, on donne AB = 3,5 cm ; AE = 2,5 cm et AD = 4 cm. Le quadrilatère BIJF est la section du pavé par le plan parallèle à l'arête [AE] contenant le point B et le point I de [AD] tel que AI = 2,5 cm.

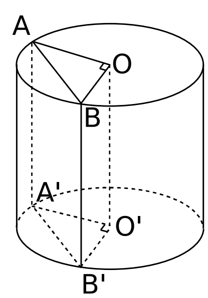
a. Construis le triangle AIB en vraie grandeur.

La face ABCD est un .... donc le triangle AIB est ....

b. Construis la section BIJF en vraie grandeur.

BIJF est la section du pavé par .... donc BIJF est un ....

7 *Cylindre*



On réalise la section ABB'A' par un plan parallèle à l'axe d'un cylindre de hauteur [OO'] mesurant 5 cm et de rayon [OA] mesurant 3 cm, de sorte que le triangle AOB soit rectangle en O.

a. Précise la nature du triangle AOB.

[OA] et [OB] sont deux .... du cercle de .... donc AOB est un triangle .... et .... en ... .

b. Quelle est la nature de la section ABB'A' ?

La section d'un cylindre par un plan .... est un .... donc ABB'A' est un ....

c. Calcule l'aire de ABB'A' arrondie au dixième.

Le triangle AOB est .... donc d'après le ...., on a : .... = ... ;

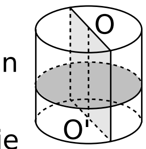
soit AB^2 = ... = ...

AB > 0 donc AB = ... cm.

AB × AA' = ... ≈ ....

L'aire de ABB'A' est d'environ .... cm^2.

8 *Sections de cylindre*

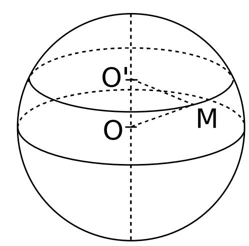


On considère un cylindre de révolution de rayon 2,5 cm et de hauteur 3,5 cm.

a. Dessine ci-dessous en vraie grandeur, la section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe (OO').

b. Dessine ci-dessous en vraie grandeur, la section de ce cylindre par un plan parallèle à son axe contenant O et O'.

9 *Sphère*



On réalise la section d'une sphère de centre O et de rayon 4 cm par un plan passant par le point O' situé à 2 cm de O.

a. M étant un point de la section, quelle est la nature du triangle OO'M ?

O est le ...., O' le centre de la .... donc le triangle OO'M est un triangle ....

b. Calcule la valeur exacte du rayon de la section puis donne la valeur arrondie au millimètre.

Le triangle OO'M est ...., donc d'après le ...., on a .... = ... ;

soit $O'M^2$ = ... = ...

O'M > 0 donc O'M = ... ≈ ....

Le rayon de la section est d'environ .... mm.

c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{O'OM}$ à 1° près.

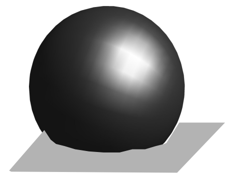
Dans le triangle .... rectangle en ...., [OM] est .... du triangle et [OO'] le .... à l'angle $\widehat{O'OM}$.

Donc .... = $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$;

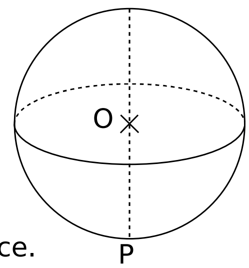
soit .... = ...

D'où une mesure de l'angle $\widehat{O'OM}$ est .... à 1° près.

10 *Boule de pétanque*



Une boule de pétanque de rayon 3,6 cm lancée dans le sable a laissé une empreinte ayant la forme d'une calotte sphérique délimitée par un cercle de rayon 2,3 cm.



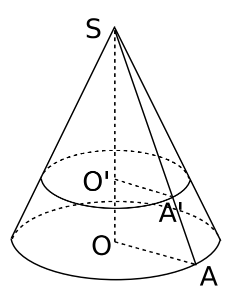
a. Complète le schéma de la situation à la main en traçant la ligne de section, son centre A et un point de la section M.
O est le centre de la boule et P le point le plus profond de la trace.

b. Calcule la profondeur de la trace à 1 mm près.

....
....
....
....
....
....
....

La profondeur de la trace est de .... cm.

11 *Cône*



On réalise la section d'un cône de révolution (C), de sommet S, de base le disque de centre O et de génératrice [SA], par un plan parallèle à la base passant par le point A' de la génératrice [SA]. SA = 8 cm ; SO = 6 cm et SA' = 5 cm.

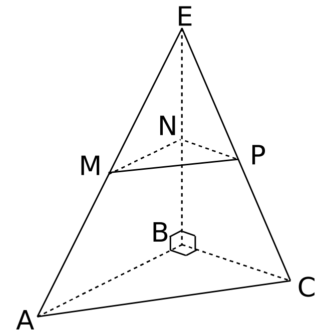
a. Montre que le cône de révolution (C') de sommet S et de base le disque de rayon [O'A'] est une réduction du cône (C).

....
....
....
....
....
....

b. Quel est le rapport des volumes des deux cônes ?

....
....
....
....

12 *Une pyramide*



EABC est un tétraèdre tel que AB = 3 cm ;
BC = 2 cm et BE = 4 cm.
MNP est la section de la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point N de [EB] tel que EN = 1,6 cm.

a. Quelle est la nature du triangle MNP ?

....
....

b. Calcule la valeur exacte de MN.

....
....
....
....
....

c. Calcule la valeur exacte de NP.

....
....
....
....
....

d. Calcule la valeur exacte de MP.

....
....
....
....
....

e. Compare les rapports des longueurs, des aires de base et des volumes.

- Rapport des longueurs : ....
- A_{ABC} = ...
  A_{MNP} = ...
  Rapport des aires : $\dfrac{A_{ABC}}{A_{MNP}}$ = ...
- V_{EABC} = ...
  V_{EMNP} = ...
  Rapport des volumes : $\dfrac{V_{EABC}}{V_{EMNP}}$ = ...

....
....
....

Le cours avec les aides animées

Q1. Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, par quel nombre sont multipliées les longueurs ? Les aires ? Les volumes ?

Q2. La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une réduction de la base. Comment obtient-on le rapport de réduction ?

Les exercices d'application

1 *Directement*

a. Un triangle a une aire de 18 cm^2.
Quelle est l'aire du triangle obtenu après un agrandissement de coefficient 3 ?

Lors d'un agrandissement de coefficient k, les aires sont multipliées par ..... .

Donc $A_{\text{triangle obtenu}}$ = ... × $A_{\text{triangle initial}}$

$A_{\text{triangle obtenu}}$ = ... × ....

$A_{\text{triangle obtenu}}$ = ...

b. Un cylindre a un volume de 51 cm^3.
Quel est le volume du cylindre obtenu après une réduction de rapport 0,6 ?

Lors d'une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par ..... .

Donc $V_{\text{cylindre obtenu}}$ = ... × $V_{\text{cylindre initial}}$

$V_{\text{cylindre obtenu}}$ = ... × ....

$V_{\text{cylindre obtenu}}$ = ...

2 *Ballons*

Un ballon de basket est assimilable à une sphère de rayon 12 cm.

a. Calcule le volume V de ce ballon. Donne la valeur exacte puis le résultat arrondi au cm^3.

On utilise la formule $V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$.

$V = \frac{4}{3} \times$ ....

V = ... et donc V ≈ ....

b. Une balle est une réduction de ce ballon à l'échelle $\frac{4}{15}$. Calcule le rayon de cette balle.

....

....

c. Calcule le volume V' de cette balle. Donne la valeur exacte puis le résultat arrondi au cm^3.

....

....

3 *À l'envers*

On fait subir un agrandissement de coefficient 5 à une pyramide. La pyramide obtenue a un volume de 2 000 cm^3.
Quel était le volume de la pyramide de départ ?

Le coefficient d'agrandissement est 5 ;

donc $V_{\text{pyramide obtenue}}$ = ... × $V_{\text{pyramide de départ}}$

soit $V_{\text{pyramide de départ}}$ = ...

....

....

....

4 *Calcul du rapport*

Une figure a une aire de 124 cm^2.
Après une réduction, on obtient une nouvelle figure dont l'aire est 89,59 cm^2.
Détermine le rapport de réduction.

Lors d'une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par ..... .

Ici, l'aire a été multipliée par ....

car .... ;

donc k^2 = ...

k est un nombre positif donc k = ...

Le rapport de réduction est donc ....

5 *Cube*

Un cube a une arête de 5 cm.

a. Quelle est, en cm^2, l'aire de sa surface totale (c'est-à-dire la surface composée par ses six faces) ?

....

....

b. Calcule le volume, en cm^3, de ce cube.

....

....

c. Un autre cube a une surface totale 16 fois plus grande. Quel est le volume, en cm^3, de ce cube ?

- On détermine le coefficient d'agrandissement.

....

....

....

- On en déduit le volume du second cube.

....

....

....

6 *Pyramide du Louvre*

La pyramide du Louvre est une pyramide régulière à base carrée de 35 m de côté et de 22 m de hauteur.

a. Calcule le volume V de cette pyramide. Donne la valeur exacte en m^3 puis la valeur arrondie à l'unité.

On utilise la formule donnant le volume d'une pyramide.

V = $\frac{1}{3} \times$ aire de base $\times$ hauteur.

V = $\frac{1}{3} \times$ ....

V = ...

V ≈ ....

b. Sur une maquette, on construit une réduction de cette pyramide, le côté de la base carrée mesure 7 cm. Calcule le coefficient de réduction.

Le coefficient k est le quotient d'une dimension de la pyramide .... par .... de la pyramide ....

Attention : les deux dimensions doivent être dans la même unité.

Donc $k = \frac{.....}{.....}$.

c. Déduis-en le volume de la pyramide sur la maquette. Donne la valeur exacte en cm^3 puis la valeur arrondie à l'unité.

....

....

....

....

....

7 *Extrait du Brevet*

Un triangle A'B'C' rectangle en A' et d'aire 27 cm^2 est un agrandissement d'un triangle ABC, rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 2 cm.

Calculer les longueurs A'B' et A'C'.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8 *Pyramide (1)*

a. Dessine une représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de hauteur 4 cm et de côté de base 2,4 cm.

b. Calcule l'aire de la base de cette pyramide.

....

....

c. Calcule le volume de cette pyramide.

....

....

....

....

d. Complète la représentation en traçant la section de la pyramide par le plan parallèle à la base coupant la hauteur aux trois-quarts en partant du sommet.

e. Déduis de la question **b.** l'aire de la base de la petite pyramide.

On a réalisé la section de la pyramide par un plan parallèle à la base coupant la hauteur aux trois-quarts en partant du sommet, donc le coefficient de réduction est $\frac{....}{....}$.

....

....

....

....

....

....

f. Déduis de la question **c.** le volume de la petite pyramide.

....

....

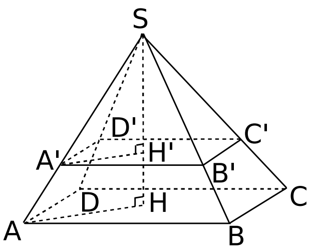
....

....

....

....

9 *Pyramide (2)*



On réalise la section d'une pyramide SABCD à base rectangulaire par un plan parallèle à sa base à 5 cm du sommet. AB = 4,8 cm ; BC = 4,2 cm et SH = 8 cm.

a. Calcule le coefficient k de réduction entre les pyramides SABCD et SA'B'C'D'.

....

....

....

b. Calcule le volume de la pyramide SABCD.

....

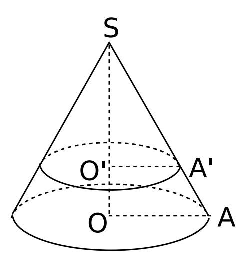
....

c. Déduis-en le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

....

....

10 *Cône*



Le cône de révolution ci-contre de sommet S a une hauteur [SO] de 10 cm et un rayon de base [OA] de 3,2 cm.
Soit O' le point du segment [SO] tel que SO' = 7 cm.
On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par O'. Ce plan coupe la génératrice [SA] en A'.

a. Calcule le coefficient de réduction entre les deux cônes.

....

....

....

b. Calcule le volume du cône initial. Donne la valeur exacte en cm³ puis la valeur arrondie au cm³.
Le volume du cône est donné par la formule :
$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$.

....

....

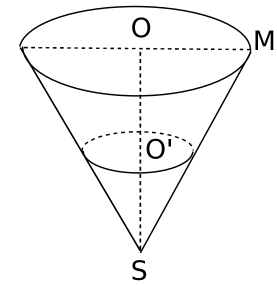
c. Déduis-en le volume du cône réduit. Donne la valeur exacte en cm³ puis la valeur arrondie au cm³.

....

....

....

11 *Récipient*



Le récipient représenté ci-contre a une forme conique et a pour dimensions OM = 6 cm et SO = 12 cm.

a. Calcule, en cm³, le volume de ce récipient. Donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

....

....

....

....

b. On remplit d'eau le récipient jusqu'au point O' tel que SO' = 4,5 cm. Le cône formé par l'eau est une réduction du cône initial.
Calcule le coefficient de réduction.

....

....

....

....

c. Déduis-en une valeur approchée du volume d'eau en cL.

....

....

....

....

12 *Tronc de pyramide*

On coupe une pyramide à mi-hauteur par un plan parallèle à la base.

a. Exprime le volume V' de la petite pyramide en fonction du volume V de la pyramide de départ.

....

....

....

....

b. Montre que le volume V'' du tronc de pyramide obtenu est égal aux $\dfrac{7}{8}$ du volume V de la pyramide de départ.

....

....

....

....