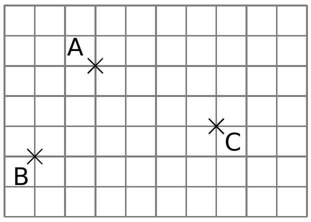
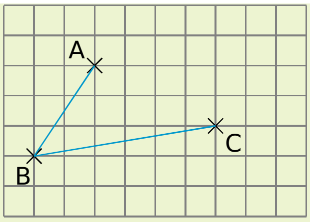
Méthode 1 : Construire un parallélogramme dans un quadrillage

Exemple : Soient trois points A, B et C non alignés placés comme ci-contre. Place le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

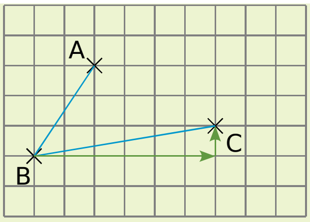


Cela peut être résolu de deux façons différentes :

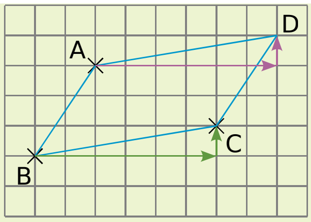
En utilisant une propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés [BC] et [AD] sont de même longueur et parallèles.

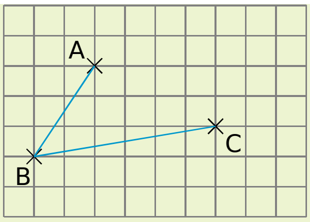


Pour aller de B à C, on se déplace de 6 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le haut.

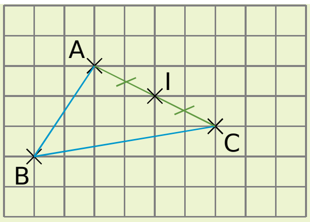


On reproduit ces mêmes déplacements à partir de A. Ainsi on obtient un quadrilatère non croisé tel que AD = BC et (AD) // (BC), c'est donc bien un parallélogramme.

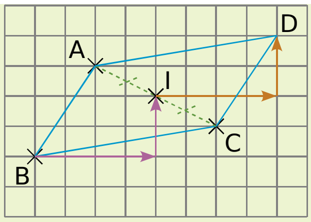
En utilisant la propriété des diagonales d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu qu'on appelle I.



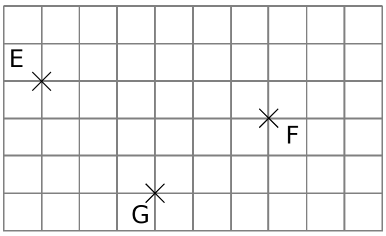
On trace le segment [AC] et on place son milieu I. C'est également le milieu du segment [BD].



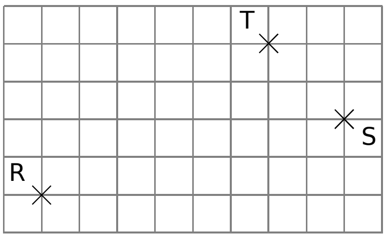
On place D tel que I soit le milieu du segment [BD] en comptant les carreaux.
Ainsi ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc bien un parallélogramme.

À toi de jouer

1 Reproduis sur ton cahier la figure suivante puis trace le parallélogramme EFGH en utilisant une propriété des côtés du parallélogramme.



2 Reproduis sur ton cahier la figure suivante puis trace le parallélogramme RSTU en utilisant la propriété des diagonales du parallélogramme.

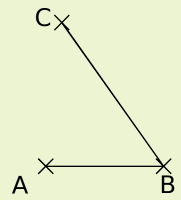


Méthode 2 : Construire un parallélogramme avec des instruments de géométrie

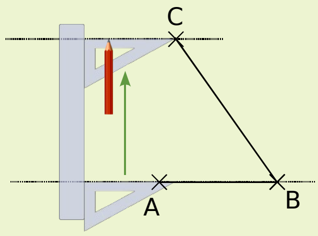
Exemple : Soient trois points A, B et C non alignés. Place le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Cela peut être résolu de plusieurs façons différentes, en voici deux :

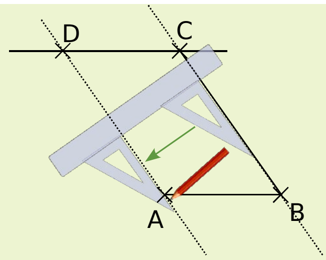
En utilisant une propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont parallèles deux à deux : soit (AB)//(CD) et (BC)//(AD).

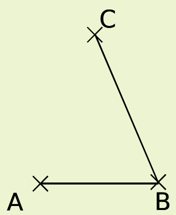


On trace la parallèle à (AB) passant par C.

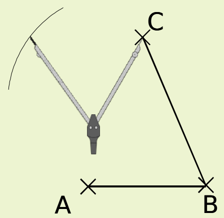


On trace la parallèle à (BC) passant par A. Ces deux droites sont sécantes en D.
Ainsi ABCD a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc bien un parallélogramme.

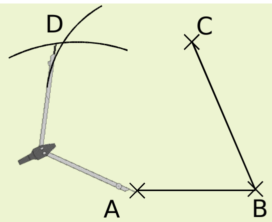
En utilisant une autre propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés [AB] et [CD] sont de la même longueur deux à deux : soit AB = CD et BC = AD.



À l'aide du compas, on reporte la longueur AB à partir du point C.



On reporte la longueur BC à partir du point A. On place le point D à l'intersection des deux arcs de cercle puis on trace les côtés [AD] et [CD].
Ainsi ABCD a ses côtés opposés égaux deux à deux, c'est donc bien un parallélogramme.

À toi de jouer

3 Construis le parallélogramme PRLG tel que PR = 5 cm, PG = 6 cm et $\widehat{RPG} = 74°$ en utilisant la propriété sur le parallélisme des côtés opposés du parallélogramme.

4 Construis le parallélogramme DRAP tel que DR = 6 cm, DP = 8 cm et $\widehat{RDP} = 40°$ en utilisant la propriété sur l'égalité des longueurs des côtés opposés du parallélogramme.

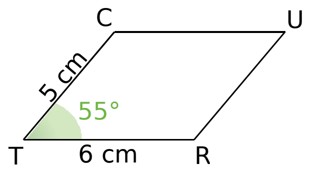
5 Construis le parallélogramme VOLE tel que VO = 4 cm, VE = 5 cm et VL = 3 cm.

Méthode 3 : Utiliser les propriétés d'un parallélogramme

À connaître

Les propriétés sont du type :
« Si un quadrilatère est un parallélogramme alors … . ».

Exemple : TRUC est un parallélogramme tel que CT = 5 cm, TR = 6 cm et $\widehat{CTR}$ = 55°. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CUR}$. Justifie.



Recherche :

❶ On sait que TRUC est un parallélogramme donc on dispose de toutes les propriétés de ce quadrilatère.	❷ On demande la mesure d'un angle, on utilise donc une propriété sur les angles du parallélogramme.

Démonstration :

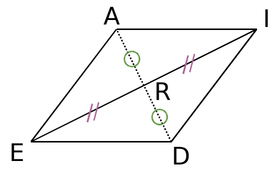
Données	Propriété	Conclusion
On sait que TRUC est un parallélogramme et que $\widehat{CTR}$ = 55°.	Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même longueur.	Donc $\widehat{CTR}$ = $\widehat{CUR}$ = 55°.

Méthode 4 : Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

À connaître

Les propriétés sont du type :
« Si un quadrilatère a … alors c'est un parallélogramme. ».

Exemple : Soit IDE un triangle et R le milieu du segment [EI]. On a tracé le point A, symétrique de D par rapport à R. Démontre que AIDE est un parallélogramme.



Recherche :

❶ On sait que AIDE est un quadrilatère. On sait de plus que R est le milieu de la diagonale [EI] de ce quadrilatère et qu'il est également le milieu de la diagonale [AD] car D et A sont symétriques par rapport à R.	❷ On cherche donc une propriété qui permet de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant ses diagonales.

Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
On sait que R est le milieu de [EI]. On sait que A et D sont symétriques par rapport à R donc R est aussi le milieu de [AD].	Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.	Donc AIDE est un parallélogramme.

Méthode 5 : Construire un quadrilatère particulier par ses diagonales

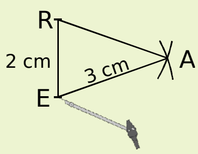
À connaître

Si un parallélogramme a ses **diagonales de même longueur** alors c'est un **rectangle**.

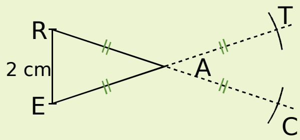
Si un parallélogramme a ses **diagonales perpendiculaires** alors c'est un **losange**.

Si un parallélogramme a ses **diagonales de même longueur et perpendiculaires** alors c'est un **carré**.

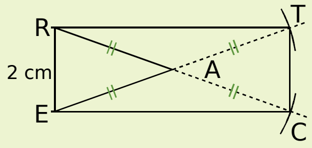
Exemple 1 : Dessine un rectangle RECT de centre A dont les diagonales mesurent 6 cm et tel que RE = 2 cm.



Le quadrilatère RECT est un rectangle donc ses diagonales ont même milieu et même longueur. On construit le triangle REA isocèle en A tel que RE = 2 cm et AE = 3 cm.

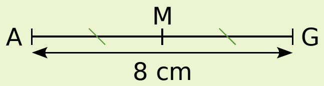


On construit alors les points C et T symétriques respectifs de R et de E par rapport à A.

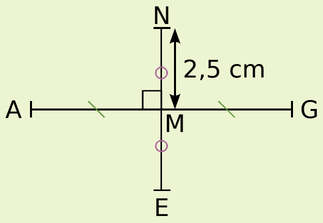


On termine le rectangle en traçant les segments [RT], [TC] et [EC].
Ainsi RECT a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et de la même longueur, c'est donc bien un rectangle.

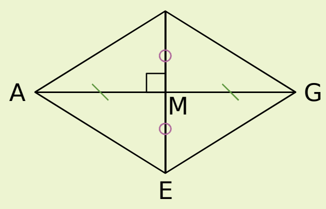
Exemple 2 : Dessine un losange ANGE de centre M dont les diagonales vérifient AG = 8 cm et NE = 5 cm.



Le quadrilatère ANGE est un losange donc ses diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires.
On trace la diagonale [AG] et on place son milieu M.



On trace la perpendiculaire à (AG) passant par M et on place les points N et E sur cette droite à 2,5 cm du point M.



On relie les points A, N, G et E pour former le losange.
Ainsi ANGE a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et perpendiculaires, c'est donc bien un losange.

Remarque : Pour construire un carré, on utilise la même méthode que pour le losange, les diagonales étant en plus de même longueur.

À toi de jouer

6 Construis un rectangle BLAN de centre C dont les diagonales mesurent 7 cm et tel que l'angle $\widehat{BCL}$ mesure 80°.

Méthode 6 : Utiliser les propriétés d'un rectangle, d'un losange ou d'un carré

Exemple : MATH est un rectangle de centre I. Démontre que le triangle MAI est un triangle isocèle en I.

Recherche :

❶ On parle d'un rectangle et de son centre. Le triangle MAI fait intervenir les demi-diagonales du rectangle.	❷ On s'oriente donc vers une propriété des diagonales du rectangle.

Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
On sait que MATH est un rectangle de centre I.	Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont même longueur et même milieu.	Donc MT = AH puis $\frac{MT}{2} = \frac{AH}{2}$, d'où MI = AI. Comme le triangle MAI a deux côtés égaux, il est isocèle en I.

À toi de jouer

7 Dessine un carré BEAU de centre X dont les diagonales mesurent 4 cm. Démontre que le triangle AUX est un triangle rectangle isocèle en X.

Méthode 7 : Démontrer qu'un parallélogramme est un rectangle, un losange ou un carré

À connaître

Si un parallélogramme a **un angle droit**
alors c'est un **rectangle**.

Si un parallélogramme a **deux côtés consécutifs de même longueur**
alors c'est un **losange**.

Si un parallélogramme a **un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur** alors c'est un **carré**.

Exemple : ABCD est parallélogramme tel que ABD est un triangle isocèle en A. Démontre que ABCD est un losange.

Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
ABD est un tiangle isocèle en A donc les côtés [AB] et [AD] sont de même longueur. ABCD est donc un parallélogramme avec deux côtés consécutifs [AB] et [AD] de même longueur.	Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.	Donc ABCD est un losange.

À toi de jouer

8 Dessine un parallélogramme ABCD tel que AB = 3 cm, AD = 6 cm et $\widehat{ABC} = 90°$. Démontre que ABCD est un rectangle.