Méthodes et notions essentielles

Méthode 1 : Tester si un nombre est solution d'une équation

À connaître

$2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'**inconnue** est désignée par la lettre x.
Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ et $x + 10$.
Les solutions de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$ est vérifiée.

Exemple : 3 est-il une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$?

Pour $x = 3$, on calcule séparément $2x^2 - 5$ et $x + 10$.

$2x^2 - 5 = 2 \times 3^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = 18 - 5 = 13$ | $x + 10 = 3 + 10 = 13$

On constate que, pour $x = 3$, $2x^2 - 5 = x + 10$. Il y a égalité entre les deux membres donc 3 est une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$.

À toi de jouer

1 Les nombres 3, -2 et 5 sont-ils solutions de l'équation $x^2 + 4 = 3x + 14$?

2 Parmi les nombres entiers de 0 à 10, existe-t-il une solution de l'équation $4(x + 3) = 6x + 2$?

Méthode 2 : Résoudre une équation du premier degré

À connaître

- Une égalité reste vraie **en ajoutant ou en soustrayant un même nombre** à ses deux membres.
- Une égalité reste vraie **en multipliant ou en divisant** ses deux membres **par un même nombre non nul**.

Exemple : Résous l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

$7x + 2 = 4x + 9$
$7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$ → **On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $4x$ aux deux membres.

$3x + 2 = 9 + 0x$
$3x + 2 - 2 = 9 - 2$ → **On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche** en retranchant **2** aux deux membres.

$3x = 7$
$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{7}{3}$ → **On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par **3**.
$x = \dfrac{7}{3}$

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ pour $x = \dfrac{7}{3}$. On vérifie ensuite que $\dfrac{7}{3}$ est une solution effective de l'équation initiale $7x + 2 = 4x + 9$ en appliquant la **méthode 1**.

À toi de jouer

3 Résous les équations : $3x + 5 = 4$; $7x + 8 = 14x$ et $5x - 3 = 7 + 5x$.

Méthode 3 : Simplifier une équation

Exemple : Simplifie l'équation suivante : $5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=7+\frac{8x}{5}-4$.

On développe d'abord puis on réduit chacun des deux membres de l'équation :

$5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=5\times\frac{2}{3}x+5\times1=\frac{10}{3}x+5$ | $7+\frac{8x}{5}-4=\frac{8x}{5}+7-4=\frac{8x}{5}+3$. Soit :

$\frac{10}{3}x+5=\frac{8}{5}x+3$ ⟶ On réduit d'abord chaque terme de l'équation au même dénominateur, ici 15.

$\frac{50}{15}x+\frac{75}{15}=\frac{24}{15}x+\frac{45}{15}$ ⟶ On multiplie chaque membre par 15 pour simplifier l'équation.

$50x + 75 = 24x + 45$ ⟶ Il reste à résoudre l'équation $50x + 75 = 24x + 45$

À toi de jouer

4 Simplifie les équations suivantes puis résous-les :

a. $7(2x + 3) - 23 = -x + 5(2x + 1)$ **b.** $\frac{x}{3}+2=\frac{5x}{6}-1$ **c.** $(x + 1)(x - 2) = x^2 + 2$

Méthode 4 : Comparer des nombres

À connaître

- $x > 0$ se lit **« x est un nombre strictement positif »** et $x < 0$ se lit **« x est un nombre strictement négatif »**.
- Si $x > y$ alors $x - y > 0$. Réciproquement, si $x - y > 0$ alors $x > y$.

Des règles analogues existent aussi pour les symboles <, ≤ et ≥.

À connaître

- On ne change pas le sens d'une inégalité **en ajoutant ou en soustrayant** un même nombre à ses deux membres.
- On ne change pas le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **positif** non nul.
- On change le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **négatif** non nul.

Exemple : On sait que $-2{,}5 > a$. Que peux-tu dire de $-3a - 7$ et $2a$?

$a < -2{,}5$

$-3a > -3 \times (-2{,}5)$ ⟶ On multiplie par **– 3** qui est **un nombre négatif** donc **le sens de l'inégalité change**.

$-3a - 7 > 7{,}5 - 7$ ⟶ On retranche **7**.

$-3a - 7 > 0{,}5$

$a < -2{,}5$

$2a < 2 \times (-2{,}5)$ On multiplie par **2** qui est **un nombre positif** donc **le sens de l'inégalité ne change pas**.

$2a < -5$

À toi de jouer

5 Comme $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, encadre le nombre $7\pi - 22{,}3$ et compare 7π et $22{,}3$.

Méthode 5 : Résoudre un problème à l'aide d'une équation

À connaître

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

Remarque : Lorsque la résolution d'un problème par l'arithmétique devient fastidieuse voire impossible, utiliser une équation s'avère souvent nécessaire.

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à son double diminué de 3.

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x le nombre cherché. → **On repère la grandeur non connue** parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note généralement x et on l'appelle « inconnue ».

Étape n°2 : Mettre en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$.
Le double du nombre diminué de 3 est $2x - 3$. → **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x.

$5x + 7 = 2x - 3$ → La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

$$5x + 7 = 2x - 3$$
$$5x + 7 - 2x = 2x - 3 - 2x$$
$$3x + 7 = -3$$
$$3x + 7 - 7 = -3 - 7$$
$$3x = -10$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$$
$$x = -\frac{10}{3}$$

→ **On résout l'équation** à l'aide des propriétés de la **méthode 2**.

Étape n°4 : Vérifier que la valeur trouvée est solution du problème

Le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 :

$$5 \times \left(-\frac{10}{3}\right) + 7 = -\frac{50}{3} + \frac{21}{3} = -\frac{29}{3}$$

Le double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3 :

$$2 \times \left(-\frac{10}{3}\right) - 3 = -\frac{20}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{29}{3}$$

Ainsi le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 est égal au double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3.

Étape n°5 : Conclure

Le nombre cherché est donc $-\frac{10}{3}$.

À toi de jouer

6 Que vaut le nombre x si le triple de la différence de x et de 7 est égal à la moitié de la somme de x et de 1 ?

7 J'ai deux ans de plus que Julie et Marc a le double de mon âge. À nous trois, nous avons 110 ans. Quel est mon âge ?