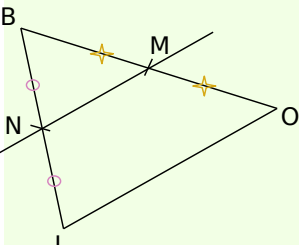


Méthode 1 : Montrer que des droites sont parallèles

À connaître

Si, dans un **triangle**, une droite passe par les **milieux** de deux côtés du triangle alors elle est **parallèle** au troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Démontre que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	La droite (MN) est ainsi parallèle au troisième côté du triangle, donc (MN) est parallèle à (OL).

À toi de jouer

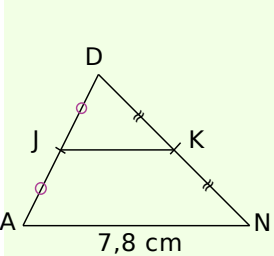
1 ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB]. Démontre que (OM) est parallèle à (BC).

Méthode 2 : Calculer une longueur connaissant des milieux

À connaître

Si, dans un **triangle**, un segment joint les **milieux** de deux côtés alors sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Calcule la longueur JK.

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle DAN, J et K sont les milieux respectifs de [DA] et [DN] et que $AN = 7,8 \text{ cm}$.	Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Le segment [JK] a donc pour longueur la moitié de celle du troisième côté [AN] : $JK = \frac{AN}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9$ Donc $JK = 3,9 \text{ cm}$.

À toi de jouer

2 Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C. Démontre que $BC = \frac{EF}{2}$.

3 Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O' distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre. Calcule la longueur CD.

Méthode 3 : Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

À connaître

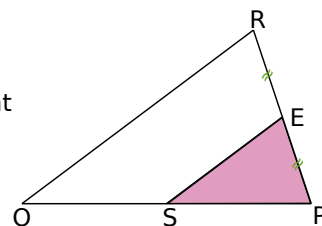
Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Exemple : Soit TOR un triangle tel que M soit le milieu de [RO]. La parallèle à [TR] passant par M coupe [OT] en N. Démontre que N est le milieu de [OT].

	Données	Propriété	Conclusion
les droites en vert sont parallèles entre elles	Dans le triangle TOR, on sait que M est le milieu du côté [RO] et que la droite (MN) est parallèle à la droite (TR).	Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.	La droite (MN) coupe le troisième côté [OT] du triangle en son milieu, donc N est le milieu de [OT].

À toi de jouer

4 Sur la figure ci-contre, les droites (ES) et (RO) sont parallèles. Démontre que S est le milieu de [OP].



Méthode 4 : Calculer une longueur avec des rapports égaux

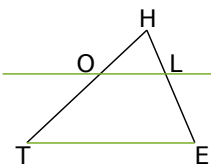
À connaître

Proportionnalité des longueurs dans un triangle :

Si, dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N un point de [AC] et (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Remarque : On appelle parfois cette propriété la (petite) propriété de Thalès.

Exemple : Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles. On donne HE = 5 cm, HL = 2 cm, TE = 7 cm et HO = 3 cm. Calcule les longueurs HT et OL.



Dans le triangle HTE : $O \in [HT]$, $L \in [HE]$ et $(OL) \parallel (TE)$. D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$ soit $\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7}$.

- D'une part, $2 \times HT = 3 \times 5$ soit $HT = \frac{3 \times 5}{2} = 7,5$ donc HT = 7,5 cm.
- D'autre part, $5 \times OL = 2 \times 7$ soit $OL = \frac{2 \times 7}{5} = 2,8$ donc OL = 2,8 cm.

À toi de jouer

5 Dans le triangle DST, E est un point de [DS] et F un point de [DT] tels que DS = 6,3 cm ; EF = 2,9 cm ; ST = 8,7 cm et DF = 1,8 cm. De plus, (EF) et (ST) sont parallèles. Calcule DE et DT.

Méthode 5 : Agrandir, réduire dans le plan

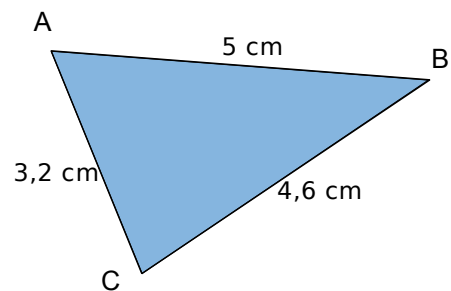
À connaître

Quand deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre.
Dans un agrandissement ou une réduction les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Remarques : Si F est un agrandissement de F' alors F' est une réduction de F.

Le coefficient de proportionnalité est le rapport d'agrandissement ou de réduction.

Exemple 1 : Le triangle AEF est un agrandissement de rapport 1,2 du triangle ABC de la figure ci-contre tel que E appartienne à [AB) et F appartienne à [AC). Calcule les longueurs des côtés du triangle AEF.



Comme AEF est un agrandissement de ABC de rapport 1,2 alors ses dimensions sont 1,2 fois celles du triangle ABC.

On en déduit alors que :

$$AE = 1,2 \times AB = 1,2 \times 5 = 6 \text{ soit } AE = 6 \text{ cm.}$$

$$AF = 1,2 \times AC = 1,2 \times 3,2 = 3,84 \text{ soit } AF = 3,84 \text{ cm.}$$

$$EF = 1,2 \times BC = 1,2 \times 4,6 = 5,52 \text{ soit } EF = 5,52 \text{ cm.}$$

Exemple 2 : Le triangle GRD est rectangle en R tel que GR = 6 cm et RD = 8 cm. Le triangle PTI est une réduction de rapport 0,5 du triangle GRD, tel que l'angle $\widehat{PTI}$ soit la réduction de l'angle $\widehat{GRD}$. Quelle est la nature du triangle PTI ? Calcule TP et TI.

Comme PTI est une réduction de GRD de rapport 0,5 alors les mesures d'angles sont conservées : $\widehat{PTI} = \widehat{GRD} = 90^\circ$. Donc le triangle PTI est rectangle en T.

De plus, ses dimensions sont 0,5 fois celles du triangle GRD :

On en déduit alors que :

$$TP = 0,5 \times GR = 0,5 \times 6 = 3 \text{ soit } TP = 3 \text{ cm.}$$

$$TI = 0,5 \times RD = 0,5 \times 8 = 4 \text{ soit } TI = 4 \text{ cm.}$$

À toi de jouer

6 Le triangle BEC est une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP de côtés 3,6 cm ; 5,2 cm et 7,2 cm. Donne les longueurs du triangle BEC puis construis-le.

7 Donne les dimensions d'un agrandissement de rapport 2,5 du triangle PAS tel que $\widehat{APS} = 100^\circ$, $\widehat{SAP} = 50^\circ$ et PA = 3 cm.

8 Soit un rectangle BLEU de longueur 5 cm et de largeur 4 cm. Soit ROSE une réduction de BLEU de rapport $\frac{3}{5}$. Quelle est la nature du quadrilatère ROSE ? Justifie ta réponse puis construis ROSE.