Méthode 1 : Utiliser la définition de la racine carrée

À connaître

La **racine carrée d'un nombre positif** a est le **nombre positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a. Le symbole $\boxed{\sqrt{\ }}$ est appelé « **radical** ».

Remarque : $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque a est un nombre strictement négatif.

À connaître

Pour tout nombre **positif** a, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple 1 : Calcule $\sqrt{1}$; $\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ et $\sqrt{1{,}3\times 1{,}3}$.

- $1^2 = 1$ et 1 est positif donc $\sqrt{1} = 1$.
- 3,6 est positif donc $\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2 = 3{,}6$.
- $3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$.
- 5 est positif donc $\sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
- 2 est positif donc $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
- 1,3 est positif donc $\sqrt{1{,}3\times 1{,}3} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3$.

À connaître

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier, sa racine carrée est un nombre entier positif.

Exemple 2 : À l'aide de la calculatrice, donne la valeur exacte ou la valeur arrondie au millième des nombres $\sqrt{625}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{12{,}25}$.

On utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice.

- Pour $\sqrt{625}$, la calculatrice affiche 25.
  Donc $\sqrt{625} = 25$ (**valeur exacte**).
  La racine carrée de 625 est un entier donc 625 est un **carré parfait**.
- Pour $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,414213562.
  2 **n'est pas un carré parfait**, on donne une **valeur arrondie** de $\sqrt{2}$.
  Donc $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (**valeur arrondie au millième**).
- Pour $\sqrt{12{,}25}$, la calculatrice affiche 3,5. Donc $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ (**valeur exacte**).

Exercices « À toi de jouer »

1 Recopie et complète.

$\sqrt{0} = \ldots$; $\sqrt{81} = \ldots$; $\sqrt{7{,}3^2} = \ldots$; $\sqrt{\ldots} = 4$; $\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \ldots$; $\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi} = \ldots$; $\sqrt{\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}} = \ldots$

2 Calcule et donne le résultat sous forme d'un nombre décimal.

$A = \sqrt{4}$; $B = \sqrt{25}$; $C = \left(-\sqrt{4{,}9}\right)^2$; $D = \sqrt{(-7)^2}$; $E = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$.

3 À l'aide de la calculatrice, donne l'écriture décimale exacte ou approchée à 0,001 près par défaut des nombres.

$F = \sqrt{3}$; $G = \dfrac{\sqrt{529}}{23}$; $H = 5\sqrt{0{,}81}$; $I = \sqrt{3 + \dfrac{2}{3}}$; $J = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{5}}$.

4 Dresse la liste des douze premiers carrés parfaits.

Méthode 2 : Simplifier la racine carrée d'un produit ou le produit de racines carrées

À connaître

Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemple 1 : Simplifie puis calcule les nombres $A = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ et $B = \sqrt{5} \times \sqrt{0{,}45}$.

$A = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$	$B = \sqrt{5} \times \sqrt{0{,}45} = \sqrt{5 \times 0{,}45} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

Exemple 2 : Écris le nombre $C = \sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$C = \sqrt{16 \times 2}$ → On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.

$C = \sqrt{4^2 \times 2}$

$C = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2}$ → On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

$C = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Exercices « À toi de jouer »

5 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible, les nombres $F = \sqrt{63}$; $G = \sqrt{147}$; $H = 3\sqrt{700}$ et $I = \dfrac{\sqrt{175}}{5}$.

Méthode 3 : Simplifier la racine carrée d'un quotient ou le quotient de racines carrées

À connaître

Pour tous nombres positifs a et b ($b \neq 0$), $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 1 : Simplifie les nombres $A = \sqrt{\dfrac{36}{25}}$ et $B = \dfrac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}}$.

$A = \sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$	$B = \dfrac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}} = \sqrt{\dfrac{0{,}56}{0{,}08}} = \sqrt{\dfrac{0{,}56 \times 100}{0{,}08 \times 100}} = \sqrt{\dfrac{56}{8}} = \sqrt{7}$

Exemple 2 : Écris $C = \sqrt{\dfrac{25}{7}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

$C = \sqrt{\dfrac{25}{7}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$ → On décompose la racine carrée du quotient afin de simplifier le numérateur.

$C = \dfrac{5 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ → On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$ puis on applique la définition d'une racine carrée.

Exercices « À toi de jouer »

6 Simplifie $D = \dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ puis écris $F = \sqrt{\dfrac{15}{45}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

Méthode 4 : Réduire une somme de racines carrées

Exemple 1 : Réduis la somme $A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$.

$A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$	→ On remarque que $\sqrt{5}$ est un facteur commun aux trois termes de la somme.
$A = (1 - 2 + 7)\sqrt{5}$	→ On factorise par $\sqrt{5}$.
$A = 6\sqrt{5}$	→ On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exemple 2 : Écris $B = 2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers relatifs, d étant le plus petit possible.

$B = 2\sqrt{36 \times 2} - 7\sqrt{9 \times 2}$	→ On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.
$B = 2\sqrt{36} \times \sqrt{2} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{2}$	→ On décompose la racine carrée de chacun des produits.
$B = 2 \times 6\sqrt{2} - 7 \times 3\sqrt{2}$	→ On applique la définition d'une racine carrée.
$B = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}$	→ $\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.
$B = (12 - 21)\sqrt{2}$	→ On factorise par $\sqrt{2}$.
$B = -9\sqrt{2}$	→ On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exercices « À toi de jouer »

7 Réduis les sommes $C = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7}$ et $D = 11\sqrt{5} - 25\sqrt{5} + 14\sqrt{5}$.

8 Écris $E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$ et $F = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

Méthode 5 : Résoudre une équation du type $x^2 = a$

À connaître

Pour tout nombre relatif a,
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution 0.
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résous les équations $x^2 = 3$, $x^2 = 36$ et $x^2 = -9$.

- $3 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
- $36 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 36$ sont $-\sqrt{36}$ et $\sqrt{36}$ soit -6 et 6.
- $-9 < 0$ donc l'équation $x^2 = -9$ n'a aucune solution.

Exercices « À toi de jouer »

9 Résous les équations $x^2 = 121$; $x^2 = 18$; $4x^2 = 9$ et $x^2 + 9 = 5$.

10 Résous l'équation $(x + 2)^2 = 1$.