

Méthode 1 : Développer avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b ,
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

→ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x - 4)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$$

→ On remplace a par x et b par 4 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'expression $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$

→ On remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'expression $(a + b)(a - b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$$(7x + 2)(7x - 2) = (7x)^2 - 2^2$$

→ On remplace a par $7x$ et b par 2 dans $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4$$

→ On réduit l'expression obtenue.

Exercices « À toi de jouer »

1 Développe et réduis les expressions suivantes.

$$A = (x + 6)^2$$

$$B = (x - y)^2$$

$$C = (3a + 1)^2$$

$$D = (6x - 5)^2$$

$$E = (z + 3)(z - 3)$$

$$F = (4x - 7y)(4x + 7y)$$

2 Calcule en utilisant les identités remarquables et sans calculatrice.

a. 101^2

b. 99^2

c. 101×99

3 Recopie puis complète les expressions suivantes.

$$A = (x + \dots)^2 = \dots + 2 \times \dots \times \dots + 25$$

$$C = (3x + \dots)(\dots - \dots) = \dots - 64$$

$$B = (\dots - 9)^2 = 4x^2 - \dots \times \dots \times \dots + \dots$$

$$D = (5x - \dots)^2 = \dots - \dots + 16$$

Méthode 2 : Factoriser avec un facteur commun

À connaître

Pour tous nombres a , b et k : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 21$ puis factorise.

$$A = 3 \times y + 3 \times 7 \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$A = 3(y + 7) \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 2x + xy$.

$$B = 2 \times x + x \times y \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$B = x(2 + y) \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$.

$$C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$C = (2x + 5)[(3x + 7) + (6x + 1)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$C = (2x + 5)(9x + 8) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Exemple 4 : Factorise l'expression $D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

$$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$D = (9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$D = (9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11] \quad \longrightarrow \quad \text{On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».}$$

$$D = (9x - 4)(2x - 5) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Exemple 5 : Factorise l'expression $E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

$$E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$E = (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$E = (5x - 7)[9x - 2 - 5x + 7] \quad \longrightarrow \quad \text{On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».}$$

$$E = (5x - 7)(4x + 5) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Exercices « À toi de jouer »

4 Écris chacune des expressions suivantes sous la forme $a(x + 7)$.

$$F = 4x + 28$$

$$G = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$$

$$H = 0,5x + 3,5$$

$$I = -5x - 35$$

5 Factorise les expressions suivantes.

$$J = 10x - 8$$

$$K = 6y^5 - 8y^2$$

$$L = 3x^2 + 4x$$

$$M = (x + 2)(x - 4) + (x + 2)(x - 5)$$

Méthode 3 : Factoriser avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b ,
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple 1 : Factorise l'expression $A = x^2 + 6x + 9$.

$A = x^2 + 6x + 9$ ———> On observe trois termes précédés du signe +.
 $A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ———> On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.
 $A = (x + 3)^2$ ———> On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$B = 25x^2 - 20x + 4$ ———> On observe trois termes et des signes différents.
 $B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ ———> On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.
 $B = (5x - 2)^2$ ———> On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = 64x^2 - 49$.

$C = 64x^2 - 49$ ———> On observe la différence de deux carrés.
 $C = (8x)^2 - 7^2$ ———> On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.
 $C = (8x + 7)(8x - 7)$ ———> On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

Exercice « À toi de jouer »

6 Factorise les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

$$D = 16x^2 + 24x + 9$$

$$E = 49x^2 - 70x + 25$$

$$F = x^2 - 81$$

Méthode 4 : Résoudre une équation produit

Exemple : Résous l'équation $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.
 On en déduit que :

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

On teste les valeurs trouvées.

Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.

Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.

Les solutions de l'équation produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont -3 et 7 .

Exercice « À toi de jouer »

7 Résous les équations produit suivantes.

a. $(x - 4)(x + 9) = 0$

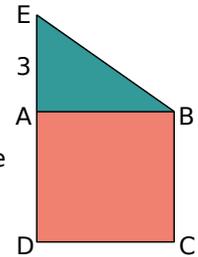
b. $(4x - 1)(9x - 2) = 0$

c. $(3x + 2)^2 = 0$

Méthode 5 : Mettre un problème en équation

Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré et ABE est un triangle rectangle en A tel que AE = 3 cm. Tous les points sont distincts.

Quelle doit être la longueur du côté du carré ABCD pour que son aire soit égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?



Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure en cm du côté du carré ABCD.
Comme les points sont distincts alors $x > 0$.
Donc $AB = BC = CD = DA = x$.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé.
On la note x .

Étape n°2 : Mettre en équation

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= AB \times AD \\ A_{ABCD} &= x \times x = x^2 \\ \\ A_{ABE} &= AB \times AE \div 2 \\ A_{ABE} &= x \times 3 \div 2 = 1,5x \end{aligned}$$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x .

On veut que :
Aire du carré ABCD = Aire du triangle rectangle ABE.
Le nombre cherché vérifie donc l'équation :
 $x^2 = 1,5x$.

La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

Pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit.

$$\begin{aligned} x^2 - 1,5x &= 1,5x - 1,5x \\ x^2 - 1,5x &= 0 \\ \\ x \times x - 1,5 \times x &= 0 \\ x(x - 1,5) &= 0 \end{aligned}$$

On élimine les termes en x dans le membre de droite.

On factorise pour se ramener à une équation produit.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

$$\begin{array}{ccc} x = 0 & \text{ou} & x - 1,5 = 0 \\ x = 0 & \text{ou} & x = 1,5 \end{array}$$

On résout l'équation produit.

Étape n°4 : Vérifier que les valeurs trouvées sont solutions du problème

On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = 0$: $x^2 = 0$ et $1,5x = 0$.
Pour $x = 1,5$: $x^2 = 1,5^2 = 2,25$
et $1,5x = 1,5 \times 1,5 = 2,25$.

On vérifie que les valeurs trouvées répondent à la question.

Comme x est un nombre strictement positif, la solution 0 ne convient pas à ce problème.

Étape n°5 : Conclure

La solution du problème est donc 1,5 cm.

On conclut.

Exercice « À toi de jouer »

8 Trouve la (ou les) valeur(s) de x pour qu'un parallélogramme de base $(4x - 5)$ et de hauteur 7 et un rectangle de longueur $(3x + 1)$ et de largeur $(4x - 5)$ aient la même aire.