Méthode 1 : Maîtriser le vocabulaire

À connaître

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel. On dit que :

a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a .

Remarque : L'entier naturel k est aussi un diviseur de a (k divise aussi a , a est aussi un multiple de k et a est aussi divisible par k).

Exemple 1 : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

$$1\,274 \div 49 = 26 \text{ donc } 1\,274 = 49 \times 26.$$

1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26). On dit également que 1 274 est divisible par 49 (et par 26), que 49 est un diviseur de 1 274 (26 l'est aussi) ou que 49 divise 1 274 (26 divise aussi 1 274).

$$1\,974 \div 84 = 23,5.$$

23,5 n'est pas un entier naturel, 1 974 n'est donc pas divisible par 84. On peut dire également que 84 n'est pas un diviseur de 1 974 et que 1 974 n'est pas un multiple de 84.

Exemple 2 : Établis la liste de tous les diviseurs de 198.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 198.

$$198 = 1 \times 198$$

$$198 = 2 \times 99$$

$$198 = 3 \times 66$$

$$198 = 6 \times 33$$

$$198 = 9 \times 22$$

$$198 = 11 \times 18$$

Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même.

Les critères de divisibilité permettent de dire que 198 n'est pas divisible par 4, 5 et 10.

Les divisions par 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16 et 17 ne donnant pas de quotients entiers, 198 n'est pas divisible par ces entiers.

Le diviseur suivant est 18 et on l'a déjà obtenu avec le produit 11×18 : on peut donc arrêter la recherche.

Les diviseurs de 198 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

Exemple 3 : Démontre que si un entier naturel est divisible par 6 alors il est divisible par 2.

n est divisible par 6 donc n peut s'écrire : $n = 6 \times k$ où k est un entier naturel.

$n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$ où $3k$ est un entier naturel. Ainsi n est divisible par 2.

À connaître

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b.$$

q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de cette division euclidienne.

Exemple 4 : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12. b. $278 = 6 \times 45 + 8$: quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On peut donc écrire : $183 = 12 \times 15 + 3$ avec $3 < 12$.

$8 < 45$ mais $8 > 6$ donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

Exercices « À toi de jouer »

1 Établis la liste des diviseurs des entiers suivants : 60, 43 et 36.

2 Démontre que le produit de deux entiers pairs est un multiple de 4.

3 Effectue les divisions euclidiennes suivantes : 345 par 74 et 6 675 par 89.

4 $325 = 5 \times 52 + 65$. Sans effectuer de division, donne le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 52.

Méthode 2 : Déterminer le PGCD de deux entiers naturels

À connaître

Le **PGCD de deux entiers naturels** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Exemple 1 : Trouve les diviseurs communs à 30 et 105 puis détermine leur PGCD.

On liste les diviseurs de 30 :

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 et 30.

On liste les diviseurs de 105 :

1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 et 105.

Les diviseurs communs à 30 et 105 sont : 1 ; 3 ; 5 et **15**.

Le PGCD de 30 et 105 est donc **15**, car c'est le plus grand des diviseurs communs.

On note $\text{PGCD}(30 ; 105) = 15$ ou $\text{PGCD}(105 ; 30) = 15$.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.

Exemple 2 : Détermine $\text{PGCD}(189 ; 693)$ par la **méthode des soustractions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geq b$, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$.

$693 > 189$ et $693 - 189 = 504$ donc $\text{PGCD}(693 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 504)$.

On cherche maintenant $\text{PGCD}(189 ; 504)$: on applique à nouveau la propriété.

$504 > 189$ et $504 - 189 = 315$ donc $\text{PGCD}(504 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 315)$.

On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :

$315 > 189$ et $315 - 189 = 126$ donc $\text{PGCD}(315 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 126)$.

$189 > 126$ et $189 - 126 = 63$ donc $\text{PGCD}(189 ; 126) = \text{PGCD}(126 ; 63)$.

Or 63 est un diviseur de 126 ($126 = 63 \times 2$) donc $\text{PGCD}(126 ; 63) = 63$.

Ainsi $\text{PGCD}(693 ; 189) = 63$.

Exemple 3 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geq b$, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : $782 = 136 \times 5 + 102$.
$$\begin{array}{r} 782 \mid 136 \\ 102 \mid 5 \end{array}$$
 Donc $\text{PGCD}(782 ; 136) = \text{PGCD}(136 ; 102)$.

On cherche maintenant $\text{PGCD}(136 ; 102)$: on applique à nouveau la propriété.

On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : $136 = 102 \times 1 + 34$.
$$\begin{array}{r} 136 \mid 102 \\ 34 \mid 1 \end{array}$$
 Donc $\text{PGCD}(136 ; 102) = \text{PGCD}(102 ; 34)$.

On continue avec $\text{PGCD}(102 ; 34)$.

On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : $102 = 34 \times 3$.
$$\begin{array}{r} 102 \mid 34 \\ 34 \mid 3 \end{array}$$

Le reste est égal à 0 donc 34 est un diviseur de 102 donc $\text{PGCD}(102 ; 34) = 34$.

Ainsi, $\text{PGCD}(782 ; 136) = 34$.

Exercices « À toi de jouer »

5 16 est-il un diviseur commun à 64 et 160 ? Est-il leur PGCD ?

6 Quel est le plus grand nombre entier divisant à la fois 35 et 91 ?

7 Calcule le PGCD de 198 et de 54 par la méthode des soustractions successives.

8 Calcule $\text{PGCD}(1\,789 ; 1\,492)$ par la méthode des divisions successives. Combien d'étapes aurait nécessité la méthode des soustractions successives ?

Méthode 3 : Démontrer que deux nombres entiers sont premiers entre eux

À connaître

Deux **entiers naturels sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1. Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

$91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91 ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à 1 donc 45 et 91 sont donc premiers entre eux.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux divisibles par 2 donc ils ont un autre diviseur commun que 1 : leur PGCD n'est pas égal à 1.

Ainsi 426 et 568 ne sont pas premiers entre eux.

A toi de jouer

9 Démontre que 481 et 625 sont premiers entre eux.

10 Démontre que 360 et 741 ne sont pas premiers entre eux.

Méthode 4 : Rendre une fraction irréductible

À connaître

Une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple : Rends les fractions $\frac{75}{105}$; $\frac{198}{180}$ et $\frac{136}{782}$ irréductibles.

On remarque que 75 et 105 sont divisibles par 3 et par 5.

$$\frac{75}{105} = \frac{75 \div 3}{105 \div 3} = \frac{25}{35}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}$$

5 et 7 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

On peut chercher à écrire 198 et 180 sous forme de produits de facteurs les plus petits possible :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$198 = 2 \times 3^2 \times 11 \text{ donc :}$$

$$\frac{198}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

$$\text{Ainsi } \frac{198}{180} = \frac{11}{10}$$

Le PGCD de 136 et 782 est 34 (cf. **méthode 2**).

34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont obligatoirement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}$$

Exercices « À toi de jouer »

11 La fraction $\frac{456}{568}$ est-elle irréductible ? Justifie ta réponse.

12 Rends les fractions $\frac{48}{60}$ et $\frac{276}{161}$ irréductibles.