# Méthodes et notions essentielles

## Méthode 1 : Calculer des aires ou des volumes

**À connaître**

Pour **calculer l'aire A d'une sphère**, on utilise la formule : A = $4 \times \pi \times \textit{rayon}^2$.

Pour **calculer le volume V d'une boule**, on utilise la formule : V = $\frac{4}{3} \times \pi \times \textit{rayon}^3$.

**Exemple :** Calcule l'aire d'une sphère et le volume d'une boule toutes deux de rayon 5 cm. Donne les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième près.

On calcule l'aire de la sphère :

$A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 5^2$

$A = 100\pi$ cm² **valeur exacte**

$A \approx 314,2$ cm² **valeur approchée**

On calcule le volume de la boule :

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$

$V = \frac{500}{3} \pi$ cm³ **valeur exacte**

$V \approx 523,6$ cm³ **valeur approchée**

**Exercices « À toi de jouer »**

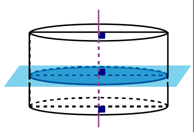
**1** Calcule l'aire exacte d'une sphère de rayon 6,2 cm puis arrondis le résultat au cm².

**2** Calcule le volume exact d'une boule de rayon 9 cm puis l'arrondi au mm³.

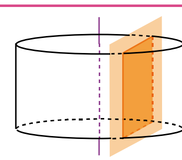
## Méthode 2 : Déterminer la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à sa base

**À connaître**

La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base.

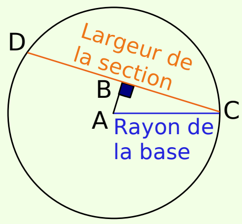


La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.



**Exemple :** Un cylindre de révolution de hauteur 10 cm dont le rayon de la base mesure 3 cm est coupé parallèlement à son axe à 2 cm de celui-ci. Quelles sont les dimensions de la section ?

La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.
La longueur du rectangle correspond à la hauteur du cylindre.
La figure représente une vue de face de la base du cylindre.




Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $3^2 = 2^2 + BC^2$.
$BC^2 = 9 - 4 = 5$, d'où $BC = \sqrt{5}$ .
Le triangle ADC est isocèle en A, donc B est le milieu de [DC].
D'où $DC = 2\sqrt{5}$.
Les dimensions de la section rectangulaire de ce cylindre sont 10 cm et $2\sqrt{5}$ cm.

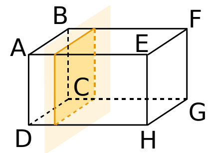
**Exercices « À toi de jouer »**

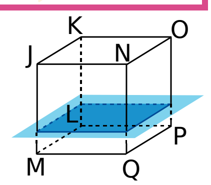
**3** La section d'un cylindre de révolution de hauteur 12 cm par un plan parallèle à son axe a pour largeur 8 cm. La distance entre l'axe et la section est 3 cm. Quel est le rayon de la base de ce cylindre ?

## Méthode 3 : Déterminer la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou à une arête

### À connaître

La section d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une face** est un **rectangle** de mêmes dimensions que cette face.




**Remarque :** Dans le cas particulier du cube, la section par un plan parallèle à une face est un carré de même dimension que cette face.

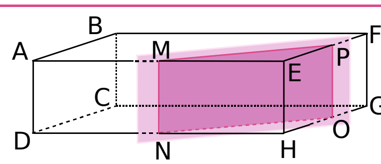
**Exemple :** Sur les figures ci-dessus, on donne AD = 4 cm ; AB = 3 cm ; AE = 5 cm et JN = 4 cm. Donne les dimensions des sections représentées.

Dans le pavé droit ABCDEFGH, la section représentée est parallèle à la face ABCD. Cette section est donc un rectangle de mêmes dimensions que ABCD soit 3 cm sur 4 cm.

Dans le cube JKLMNOPQ, la section représentée est parallèle à la face LMQP. Cette section est donc un carré de même dimension que LMQP soit 4 cm.

### À connaître

La section d'un pavé droit ou d'un cube par **un plan parallèle à une arête** est un **rectangle**, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.




**Exemple :** Le pavé droit ABCDEFGH est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH] de longueur 4 cm. On donne EM = 3 cm et EP = 2 cm. Donne la nature et les dimensions de la section MNOP.

La section MNOP est parallèle à l'arête [EH] donc MNOP est un rectangle et MN = EH.
La face AEFB du pavé droit est un rectangle donc le triangle MEP est rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, $MP^2 = ME^2 + EP^2$.
$MP^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$. D'où $MP = \sqrt{13}$.
Les dimensions du rectangle MNOP sont 4 cm et $\sqrt{13}$ cm.

### Exercices « À toi de jouer »

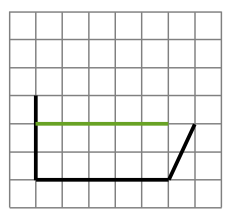
**4** Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions AB = 5 cm, AD = 6 cm et AE = 8 cm. Il est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH], le long de la diagonale [AF].

**a.** Représente en vraie grandeur la face ABFE et la section AFGD.

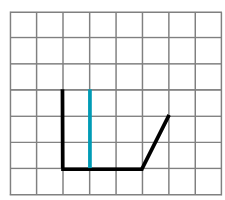
**b.** Détermine les dimensions exactes de cette section.

**c.** Donne la valeur arrondie au dixième de l'aire de cette section.

**5** Reproduis la figure et complète le tracé du pavé droit, en noir et de la section parallèle aux faces horizontales, en vert.

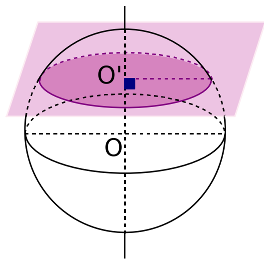


**6** Reproduis la figure et complète le tracé du cube, en noir et de la section parallèle aux faces verticales, en bleu.

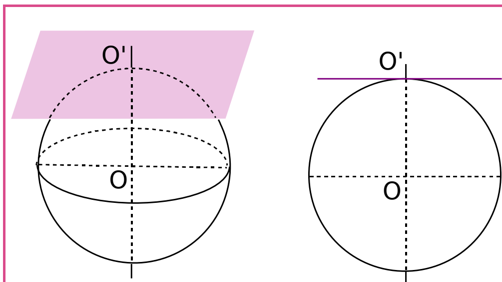


## Méthode 4 : Déterminer la section d'une sphère par un plan

**À connaître**



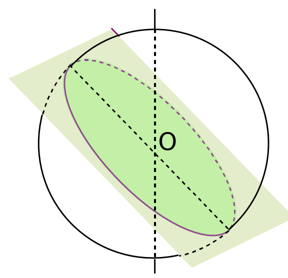

La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle** de centre O'.
Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.




Quand la distance OO' correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite au point O'. On dit que le plan est **tangent à la sphère en O'**.

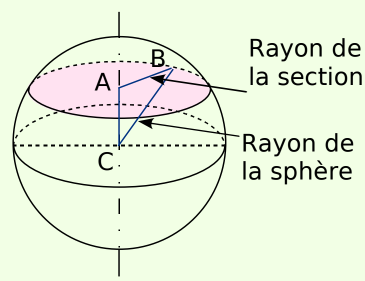
**Remarques :**

- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère.
La section est alors appelée **grand cercle**.

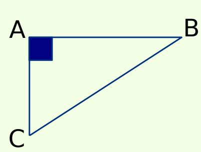



**Exemple :** Une sphère de rayon 4 cm est coupée par un plan à 3 cm de son centre.
Quelle est la nature de la section ? Représente la sphère et sa section en perspective.
Donne les dimensions de la section.

La section d'une sphère par un plan est un cercle.
On appelle C le centre de la sphère,
A le centre de la section et B un point de la section.
La droite (AC) est perpendiculaire au plan de section. En particulier, elle est perpendiculaire au rayon de la section [AB].
Donc le triangle ABC est rectangle en A.




D'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$.
$4^2 = AB^2 + 3^2$
$AB^2 = 16 - 9$
$AB^2 = 7$
d'où $AB = \sqrt{7}$ cm.




Le rayon de la section de cette sphère mesure $\sqrt{7}$ cm.

### Exercices « À toi de jouer »

**7** Une sphère de rayon 7 cm est coupée par un plan à 5 cm de son centre.

**a.** Quelle est la nature de la section ?

**b.** Représente la section en vraie grandeur.

**8** Une sphère de rayon 13 cm est coupée par un plan à 12 cm du centre.

**a.** Représente la sphère et la section en perspective.

**b.** Quel est le rayon de la section ?

## Méthode 5 : Agrandir ou réduire, effet sur l'aire, le volume

### À connaître

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport $k$, les longueurs sont multipliées par $k$, les aires sont multipliées par $k^2$, les volumes sont multipliés par $k^3$.

**Exemple :** Des ingénieurs ont construit une maquette au 1/5 000 d'un bassin de retenue. La maquette mesure 1,60 m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est 80 dm$^2$. Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ? Quelle sera, en km$^2$, sa surface ? Quel sera, en millions de m$^3$, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Pour obtenir les longueurs réelles à partir des longueurs de la maquette au 1/5 000, le coefficient d'agrandissement est $k = 5\,000$.

| Longueur en m | Aire en dm$^2$ | Volume en L | 1 m$^3$ correspond à 1 000 L donc en m$^3$, |
|---|---|---|---|
| $L_{réelle} = k \times L_{maquette}$ | $A_{réelle} = k^2 \times A_{maquette}$ | $V_{réel} = k^3 \times V_{maquette}$ | $V = 625\,000\,000$ |
| $L = 5\,000 \times 1{,}6$ | $A = (5\,000)^2 \times 80$ | $V = (5\,000)^3 \times 5$ | |
| $L = 8\,000$ | $A = 2\,000\,000\,000$ | $V = 625\,000\,000\,000$ | |

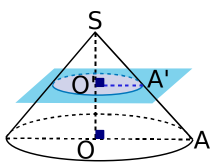
Le lac artificiel mesurera 8 km de long. Il aura une surface de 20 km$^2$ et contiendra 625 millions de m$^3$ d'eau.

### Exercices « À toi de jouer »

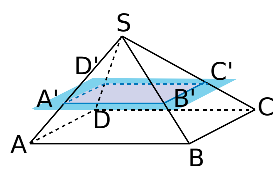
**9** Mihail fabrique deux pyramides dans du papier doré. Il réalise la deuxième en divisant toutes les longueurs de la première par 2. La surface de papier utilisé est-elle deux fois plus petite ? Le volume de l'objet obtenu est-il deux fois plus petit ?

## Méthode 6 : Déterminer la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base

### À connaître




La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un **plan parallèle à la base** est une réduction de la base.




**Remarque :** La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD et le cône de révolution de hauteur [SO'] est une réduction du cône de révolution de hauteur [SO].

**Exemple :** La pyramide SABCD à base carrée de côté 3 cm et de hauteur 5 cm est coupée par un plan parallèle à sa base à 4 cm du sommet. Quelle est la longueur A'B' du côté de la base de la pyramide réduite SA'B'C'D' ?

La hauteur de la pyramide initiale est 5 cm et celle de la pyramide réduite est 4 cm.

Le coefficient de réduction est $k = \frac{4}{5}$. La longueur du côté de la base de la pyramide réduite est donnée par : $A'B' = k \times AB = \frac{4}{5} \times 3 = 2{,}4$. Soit A'B' = 2,4 cm.

### Exercices « À toi de jouer »

**10** Un verre à cocktail de forme conique de contenance 12,8 cL est rempli aux trois quarts de sa hauteur par un mélange de jus de fruits. Quel volume de jus de fruits contient-il ?