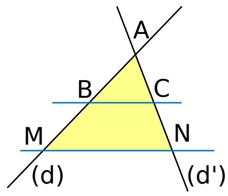
Méthodes et notions essentielles

Méthode 1 : Calculer une longueur

À connaître : Théorème de Thalès

> Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
> B et M sont deux points de (d) distincts de A.
> C et N sont deux points de (d') distincts de A.
> Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles** alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemple 1 : Sur la figure ci-contre, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. AB = 3 cm ; AN = 4 cm et AM = 7 cm.
Calcule la longueur AC.

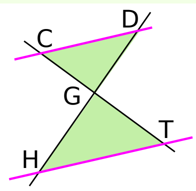


Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, soit $\frac{3}{7} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{MN}$.

On utilise la propriété des produits en croix pour calculer la longueur demandée.

Calcul de AC : $7 \times AC = 3 \times 4$ soit $AC = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}$ donc $AC = \frac{12}{7}$ cm.

Exemple 2 : Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles.
On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm.
Calcule GT et CD.



Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G.
Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{GC}{GT} = \frac{GD}{GH} = \frac{CD}{HT}$, soit $\frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$.

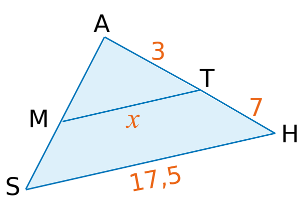
Calcul de GT : $25 \times GT = 45 \times 20$.
$GT = \frac{45 \times 20}{25}$
donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : $25 \times 27 = 45 \times CD$.
$CD = \frac{25 \times 27}{45}$
donc CD = 15 mm.

Exercices « À toi de jouer »

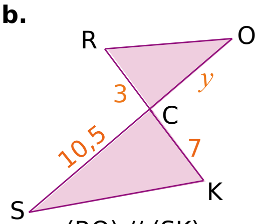
1 Dans chacun des cas suivants, calcule, si c'est possible, la valeur de x, y et z indiquée sur la figure.

a.



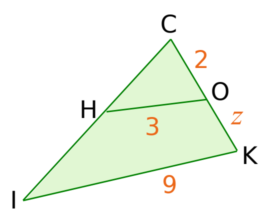
(MT) // (SH)

b.



(RO) // (SK)

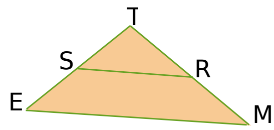
c.



2 Dans le triangle DOT, E est un point de [DO]. La parallèle à (OT) passant par E coupe [DT] en F. On sait que DO = 6 cm ; DT = 5 cm ; OT = 8 cm et DF = 1 cm.
Calcule DE et EF.

Méthode 2 : Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Exemple : Sur la figure ci-contre, TR = 11 cm ; TS = 8 cm ; TM = 15 cm et TE = 10 cm.
Montre que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.



Les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.

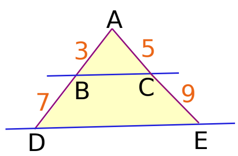
D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$. | D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$.

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$. Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

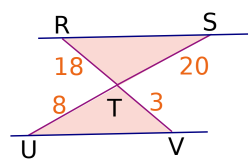
Exercices « À toi de jouer »

3 Montre que les droites bleues ne sont pas parallèles.

a.



b.

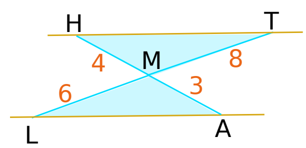


Méthode 3 : Montrer que deux droites sont parallèles

À connaître : Réciproque du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple : Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



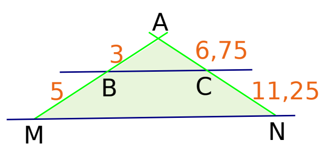
D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$. | D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$. De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

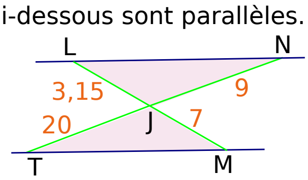
Exercices « À toi de jouer »

4 Montre que les droites bleues dans les figures ci-dessous sont parallèles.

a.



b.



Méthode 4 : Agrandir ou réduire une figure

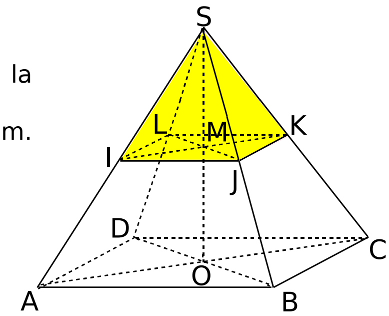
À connaître

Lorsque deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre.
Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Remarques : Si $\mathcal{F}$ est un agrandissement de $\mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}'$ est une réduction de $\mathcal{F}$.

Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ($k > 1$) ou de réduction ($0 < k < 1$).

Exemple 1 : La pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD.
On donne AB = 6 cm ; SA = 15 cm et SI = 5 cm.
Calcule IJ.



On sait que la pyramide SIJKL est une réduction de rapport k de la pyramide SABCD.
Donc les longueurs des deux pyramides sont proportionnelles.

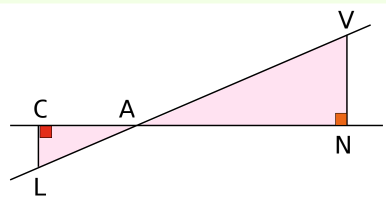
[SI] étant une réduction de rapport k de [SA], on en déduit que : $k = \frac{\text{SI}}{\text{SA}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

De même, [IJ] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AB].

Donc $\text{IJ} = k \times \text{AB} = \frac{1}{3}\,\text{AB} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

Exemple 2 : Les droites (VL) et (CN) sont sécantes en A.
(LC) et (VN) sont perpendiculaires à (CN).

Le triangle LAC est-il une réduction du triangle VAN ?
Justifie ta réponse.



1) Les triangles LAC et VAN sont deux triangles rectangles donc ils ont la même forme.

2) Vérifions que les longueurs sont proportionnelles.

Les droites (CN) et (VL) sont sécantes en A.
Les droites (LC) et (NV) sont perpendiculaires à la même droite (AN) donc elles sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{\text{AV}}{\text{AL}} = \frac{\text{NV}}{\text{LC}}$.
Les longueurs des triangles VAN et LAC sont donc proportionnelles.

On peut alors conclure que le triangle LAC est une réduction du triangle VAN.

Exercices « À toi de jouer »

5 Soit TRAN un losange tel que TR = 5 cm et tel que l'angle $\widehat{\text{TRA}}$ mesure 30°.

On sait que JEDI est un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$ de TRAN. Construis JEDI.