

## 1 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression  $A = 2(5x + 2)(3x + 1)$ . Pour cela, développe d'abord l'expression  $2(5x + 2)$  puis termine le développement de  $A$ .

b. Développe le produit  $(x + 2)(3x + 2)$  et déduis-en le développement de :

$$B = (x + 2)(3x + 2)(x + 4).$$

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe les expressions suivantes :

$$C = 4(5x - 1)(3x + 3) ;$$

$$D = (1 - x)(1 + x)(2x + 1).$$

## 2 Idée fausse

a. On considère les expressions  $A = (2x + 3)^2$  et  $B = (2x)^2 + 3^2$ . Calcule ces expressions pour  $x = 0$  et pour  $x = 10$ . Qu'en déduis-tu ?

b. Peut-on dire que pour tout nombre  $a$  et tout nombre  $b$  non nuls, les expressions  $(a + b)^2$  et  $a^2 + b^2$  sont égales ? Justifie. Développe alors l'expression  $(a + b)^2$ .

c. On considère les expressions  $C = (2x + 3)(2x - 3)$  et  $D = (2x)^2 - 3^2$ . Calcule ces expressions pour  $x = 0$  puis pour  $x = 10$ . Qu'en déduis-tu ? Démontre-le.

d. Développe alors l'expression :  $(a + b)(a - b)$ .

## 3 Calcul mystère

a. Calcule les expressions  $2001 \times 1999 - 2000^2$  et  $47 \times 45 - 46^2$ . Que remarques-tu ?

b. Développe et réduis l'expression suivante :

$$(x + 1)(x - 1) - x^2$$

c. Les résultats obtenus à la question a. étaient-ils prévisibles ? Justifie.

d. Écris d'autres expressions du même style et donne leurs résultats sans poser d'opération.

## 4 Petites démonstrations

a. Que dire de la somme de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? Pourquoi ?

b. La somme de deux nombres consécutifs est-elle paire ou impaire ? Justifie.

c. Que dire du produit de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? De deux nombres consécutifs ? Pourquoi ?

5 On désigne par  $k$  un nombre entier. Marc, Vincent, Akim et Jules se partagent un sac de billes. Marc prend  $k$  billes. Vincent en reçoit 4 de moins que Marc. Akim a deux fois plus de billes que Marc et 8 de moins que Jules.

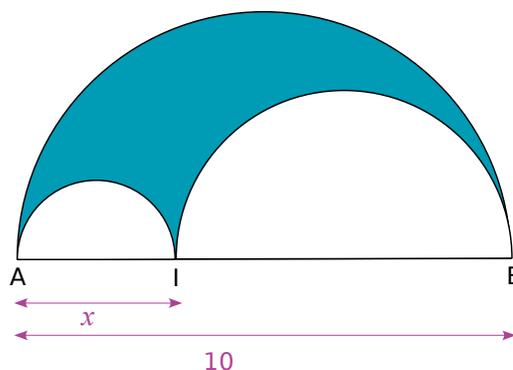
a. Calcule le nombre de billes des autres garçons si Marc en prend 7.

b. Exprime, en fonction de  $k$ , le nombre de billes des autres garçons.

c. En utilisant les expressions de la question b., déduis-en, en fonction de  $k$ , le nombre total de billes. Réduis l'expression trouvée.

d. En utilisant l'expression trouvée au c., calcule le nombre total de billes si Marc en prend 7.

## 6 Le tricerclé de Mohr



La figure ci-dessus est constituée de trois demi-cercles dont les centres appartiennent au segment [AB].

a. Réalise cette figure pour  $x = 3$ . Dans ce cas-là, calcule la longueur de chacun des trois demi-cercles (tu donneras la valeur arrondie des résultats au dixième).

Quel est alors le périmètre de la figure bleue délimitée par les trois demi-cercles ?

b. Même question pour  $x = 8$ .

c. Que remarques-tu ?

d. Exprime, en fonction de  $x$  et de  $\pi$ , le périmètre de chacun des trois demi-cercles.

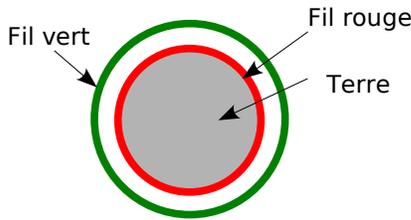
e. Déduis-en une expression du périmètre de la figure bleue en fonction de  $x$  et de  $\pi$ .

Que peux-tu dire de ce périmètre ? Justifie.

f. Utilise le résultat de la question précédente pour déterminer le périmètre de la figure bleue lorsque  $x = 1$ , puis pour  $x = 5$  et enfin pour  $x = 8,7$ .



## 7 Tour de taille



- On veut dérouler un fil rouge autour de la Terre au niveau de l'équateur. En supposant qu'on assimile la Terre à une sphère et qu'on note  $r$  son rayon, exprime la longueur  $L_r$  du fil rouge en fonction de  $r$ .
- On veut dérouler, cette fois-ci, un fil vert à un mètre au dessus du fil rouge. Exprime la longueur  $L_v$  du fil vert en fonction de  $r$ .
- Calcule et réduis l'expression  $L_v - L_r$ . Cette expression dépend-elle du rayon ? Qu'en déduis-tu ?
- Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 500 km, calcule la longueur du fil rouge puis déduis-en par une simple addition, la longueur du fil vert.

**8** Au XVII<sup>e</sup> siècle, les physiciens et les astronomes effectuaient des calculs très complexes à la main. Le mathématicien anglais Hörner a mis au point une méthode efficace pour économiser des opérations, méthode encore utilisée de nos jours en informatique.

**a.** On considère les expressions  $A = 2x^2 + 3x - 2$  et  $B = -2 + x(3 + 2x)$ . Pour une valeur de  $x$  donnée, indique le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour trouver le résultat dans chacune des deux expressions. Démontre ensuite que  $A = B$ . Quel est alors l'intérêt de l'expression B par rapport à l'expression A ?

**b.** Transforme l'expression  $C = 5x^2 - 6x - 4$  pour qu'elle contienne moins d'opérations à effectuer.

**c.** Démontre que pour tous nombres  $a, b$  et  $c$  :

$$ax^2 + bx + c = x(ax + b) + c$$

**d.** Transforme les expressions suivantes en utilisant plusieurs fois la même technique :

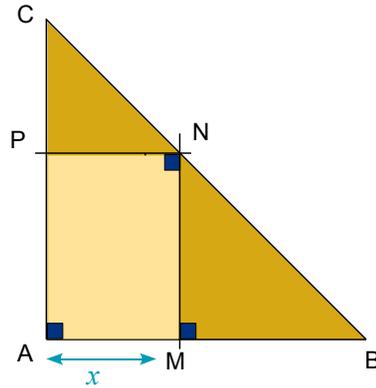
$$D = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

$$E = 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$$

**e.** Calcule chacune des expressions D et E de deux façons différentes pour  $x = 4$ . Quelle est la méthode la plus rapide ? Pourquoi ?

## 9 Optimisation

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que  $AB = 10$  cm.



- Quelle est la nature du quadrilatère AMNP ? Justifie. Démontre que les triangles CPN et MNB sont isocèles.
- Quelles valeurs peut prendre le nombre  $x$  ?
- Exprime la longueur AP en fonction de  $x$  et déduis-en l'aire du rectangle AMNP en fonction de  $x$ .
- À l'aide d'un tableur, programme les cellules pour compléter automatiquement la feuille de calculs suivante :

	A	B	C	D	...	K	L
1	Valeur de $x$ (en cm)	0	1	2	...	9	10
2	Aire de AMNP (en cm <sup>2</sup> )				...		

**e.** Où semble se trouver le point M quand l'aire de AMNP est maximale ? Que dire alors de cette aire par rapport à l'aire du triangle ABC ?

**f.** Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , l'aire de AMNP est-elle égale à 10 cm<sup>2</sup> (tu donneras un encadrement à l'unité) ?

À l'aide du tableur, affine la (les) valeur(s) de  $x$  trouvée(s) au dixième puis au centième.

**g.** Vérifie graphiquement les résultats trouvés aux questions **e.** et **f.**

Pour cela, tu construiras un repère avec les unités suivantes :

- en abscisse : 1 cm pour une unité ;
- en ordonnée : 1 cm pour cinq unités.

Puis tu représenteras l'aire en fonction de  $x$  dans ce repère.