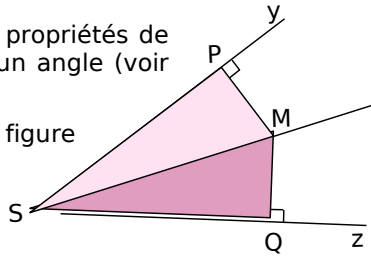


Exercices d'approfondissement

1 Propriétés de la bissectrice

Démontrons les propriétés de la bissectrice d'un angle (voir Méthode 3).

Considérons la figure ci-contre :



Propriété directe

Dans cette première partie, M est situé à la même distance des côtés $[Sy]$ et $[Sz]$ de l'angle.

- Démontre que les longueurs des côtés des triangles PSM et MSQ sont identiques.
- Que peut-on en déduire concernant les mesures des angles $\widehat{PSM}$ et $\widehat{MSQ}$? Où se trouve alors le point M ?
- Écris la propriété que tu viens de démontrer.

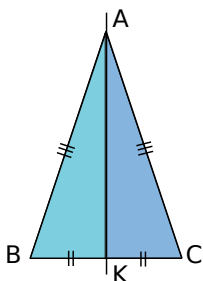
Propriété réciproque

Dans cette seconde partie, on considère la même figure de départ mais on suppose dorénavant que (SM) est la bissectrice de $\widehat{PSQ}$.

- Démontre que $\widehat{PSM} = \widehat{MSQ}$ et déduis-en que $\widehat{SMP} = \widehat{SMQ}$.
- Que peut-on en déduire concernant les triangles PSM et MSQ ? Que peut-on alors dire de PM et QM ?
- Écris la propriété que tu viens de démontrer.

2 Droites remarquables et triangle isocèle

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en A et K est le milieu de $[BC]$.



a. Rappelle la définition d'une médiane d'un triangle. La droite (AK) est-elle une médiane de ABC ? Justifie.

b. Rappelle la définition de la médiatrice d'un segment. La droite (AK) est-elle la médiatrice du segment $[BC]$? Justifie.

c. Rappelle la définition d'une hauteur dans un triangle. La droite (AK) est-elle une hauteur de ABC ? Justifie.

d. La droite (AK) est-elle la bissectrice issue de A dans le triangle ABC ? Justifie.

e. Dans un triangle isocèle, que dire de la droite passant par le sommet principal et par le milieu de la base ?

3 À la recherche du sommet perdu

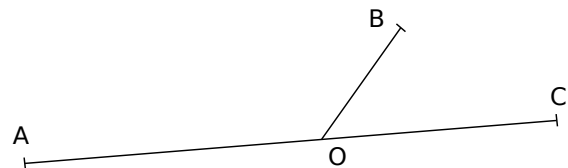
$\times P$



Reproduis une figure analogue à la figure ci-dessus puis construis le point C tel que P soit le centre du cercle inscrit au triangle ABC . Justifie.

4 En angle droit

a. Reproduis la figure ci-dessous dans laquelle A , O et C sont alignés.



Trace $[Oy]$ et $[Oz]$, les bissectrices respectives des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$.

b. Que peut-on dire de ces deux bissectrices ? Justifie ta réponse.

c. Place un point P sur $[OB]$. La perpendiculaire à (OB) passant par P coupe respectivement $[Oy]$ et $[Oz]$ en R et S . La perpendiculaire à (AC) passant par R coupe (AC) en M . La parallèle à (RM) passant par S coupe (AC) en N . Place les points R , S , M et N .

d. Démonstre que $RM + SN = RS$.

5 Des bissectrices aux fractions

a. Trace un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 6,4$ cm. Trace la bissectrice issue de A du triangle ABC qui coupe $[BC]$ au point K .

Le but de cet exercice est de démontrer que $BK = 4$ cm.

b. Trace la demi-droite $[Bx)$ contenant le point A puis trace (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{CAx}$. Démonstre que (d) et (AK) sont perpendiculaires (tu peux t'inspirer de l'exercice 41).

c. Trace la parallèle à (AK) passant par C . Elle coupe $[Bx)$ en M . Démonstre que (d) est la hauteur issue de A du triangle AMC .

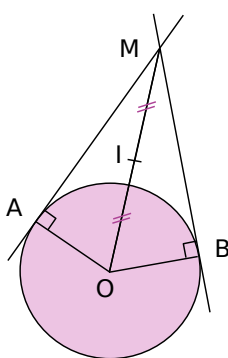
d. Déduis-en que AMC est un triangle isocèle en A .

e. Démonstre que $\frac{BK}{BC} = \frac{BA}{BM}$. Déduis-en la valeur de BK .

6 Cercle tangent à une droite en un point donné et passant par un autre point donné

- Trace un triangle EFG tel que $EF = 5,5$ cm, $FG = 4,8$ cm et $EG = 7,3$ cm.
- Trace un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O, tangent à (EF) en E et passant par le point G. Précise la position du point O. Justifie.
- Démontre que les droites (FG) et (OE) sont parallèles.

7 Quatre points « cocycliques »



A et B sont deux points distincts non diamétralement opposés d'un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O. Le point M est le point d'intersection des tangentes à ($\mathcal{C}$) en A et B. Soit I le milieu du segment [OM]. Démontre que les points O, A et B appartiennent au cercle de centre I passant par M.

8 Tangentes passant par un point donné

- Trace un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et place un point M à l'extérieur du disque.
- Construis les deux tangentes à ($\mathcal{C}$) passant par M (tu peux t'inspirer de l'exercice 44). Justifie.

9 Un problème d'optimisation

Construction et conjecture

- Soit ABC un triangle rectangle en A et soit P un point du segment [BC]. Les parallèles à (AB) et (AC) passant par P coupent respectivement [AC] et [AB] en M et N. Construis cette figure à l'aide du logiciel TracenPoche. Trace le segment [MN].
- En utilisant le bouton « règle », affiche la longueur MN. Bouge le point P et détermine sa position pour que la longueur MN soit la plus petite possible. Affiche la mesure de l'angle $\widehat{APB}$ pour cette position de P.
- Quelle conjecture peux-tu faire ?

Démonstration

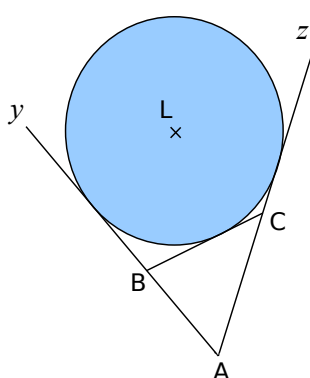
- Détermine la nature du quadrilatère MANP.
- Chercher à minimiser la longueur de [MN] revient à minimiser une autre longueur, laquelle ? Justifie.
- Démontre la conjecture faite au c. ci-dessus.

10 Cercles tangents extérieurement

- Trace un segment [AB] de longueur 6 cm et place un point P sur ce segment. Trace les cercles ($\mathcal{C}_A$) et ($\mathcal{C}_B$) de centres respectifs A et B passant par P.
- Démontre que P est le seul point commun aux cercles ($\mathcal{C}_A$) et ($\mathcal{C}_B$). On dit que ces cercles sont tangents extérieurement en P.
- Construis un cercle ($\mathcal{C}_M$) de centre M et de rayon 25 mm tangent extérieurement aux cercles ($\mathcal{C}_A$) et ($\mathcal{C}_B$).
- Quel est le périmètre du triangle MAB ?

11 Pour aller plus loin...

Cercles exinscrits à un triangle



Étant donné un triangle ABC, tout cercle tangent à l'un de ses côtés et aux prolongements des deux autres est appelé **cercle exinscrit au triangle**.

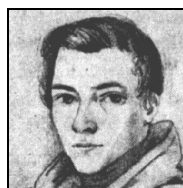
Ci-contre, on a tracé le cercle exinscrit relatif au côté [BC].

- En t'inspirant de la partie 2 de l'activité 4 de ce chapitre, démontre qu'il existe un seul cercle exinscrit relatif au côté [BC] dans le triangle ABC et précise la position du centre de ce cercle.

- Combien de cercles exinscrits totalise un triangle ?

Construction avec TracenPoche

- Avec le logiciel TracenPoche, trace trois droites sécantes deux à deux et formant un triangle ABC. Construis le cercle inscrit à ABC et les cercles exinscrits à ABC.
- Toujours dans TracenPoche, place M_A , M_B et M_C , les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] puis construis le cercle circonscrit au triangle $M_A M_B M_C$. Quelle particularité semble posséder ce dernier cercle ?



Remarque : Cette conjecture a été prouvée par Karl Feuerbach (mathématicien allemand, 1800-1834).