Exercices d'approfondissement

1 *Par groupes !*

Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre simultanément puis un second six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifie.

2 La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.
Quels sont ces quatre entiers ?

3 Démontre que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.
A-t-on la même propriété pour la somme de deux entiers pairs consécutifs ?

4 Trouve les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5 dont la somme des chiffres est 21.

5 *Nombres divisibles par 7*

a. 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifie.

b. En utilisant la question **a.**, démontre que 6 335 est divisible par 7.

c. Démontre dans le cas général que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.

d. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontre que 6 349 147 est un multiple de 7.

e. Écris un nombre entier de 15 chiffres qui soit divisible par 7.

6 *Pairs et impairs*

a. Quelle est l'écriture littérale d'un nombre pair ? D'un nombre impair ?

b. Quelle est la parité de la somme $a + b$ lorsque :

- a et b sont tous les deux pairs ?
- a et b sont tous les deux impairs ?
- a est pair et b est impair ?

c. Quelle est la parité du produit $a \times b$ lorsque :

- a et b sont tous les deux pairs ?
- a et b sont tous les deux impairs ?
- a est pair et b est impair ?

7 *Pairs et impairs (bis)*

a. Démontre que si a est impair alors a^2 est impair.

b. Déduis-en que si a^2 est pair alors a est pair.

8 n est un entier naturel.

a. Démontre que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

b. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

c. Démontre que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

9 *Les trois filles*

Dans une famille, il y a trois filles. La somme de leurs âges est 13 et le produit est 36.

a. Étudie la parité des âges.

b. Quel est l'âge de chaque fille ? Trouve toutes les possibilités.

10 *Sacrée collection !*

Source Wikipédia

Abdel dit à Doris : « J'ai plus de 400 DVD mais moins de 450 !
En les groupant par 2 ou par 3 ou par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose, il m'en reste un tout seul ! ».
Combien Abdel a-t-il de DVD ?

11 *Escalier*

Le nombre de marches d'un escalier est compris entre 40 et 80.

- Si on compte ces marches deux par deux, il en reste une.
- Si on les compte trois par trois, il en reste deux.
- Si on les compte cinq par cinq, il en reste quatre.

Quel est le nombre de marches de cet escalier ?

12 *Quotient et reste*

Trouve tous les nombres pour lesquels le quotient et le reste sont égaux dans la division euclidienne par 5.

13 *Recherche*

Combien peut-on trouver d'entiers naturels inférieurs à 1 000 dont le reste est 12 dans la division euclidienne par 25 ?

14 *Division euclidienne par 13*

Dans une division euclidienne, le diviseur est 13, le reste est 5.

a. Si l'on augmente le dividende de 1, que devient le quotient ? Le reste ?

b. De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ?

c. Si on veut diminuer le quotient de 1, combien faut-il enlever au dividende ? Donne toutes les possibilités.

15 *Division euclidienne*

On a l'égalité : $3\,625 = 85 \times 42 + 55$.
Réponds aux questions suivantes sans faire de division et en justifiant.

a. Quel est le quotient de la division euclidienne de 3 625 par 42 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 85 ?

c. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 42 ?

d. Mêmes questions que **b.** et **c.** en remplaçant 3 650 par 3 600.

e. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 569 par 85 ?

16 *Division euclidienne (bis)*

Dans une division euclidienne, que deviennent le quotient et le reste si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ?

17 *Devinette*

Lorsque je divise 134 par ce nombre, le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, le reste est 3.

Quel peut être ce nombre ? Trouve toutes les solutions.

18 *Distribution de crêpes*

La grand-mère de Nicolas a fait 31 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à part égale à chacun de ses cinq cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui.
Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin.

Pourquoi ?

19 Un groupe de moins de 40 personnes doit se répartir équitablement une somme de 229 €. Il reste alors 19 €. Plus tard, ce même groupe doit maintenant se répartir équitablement 474 € : il reste cette fois-ci 12 €.

a. Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?

b. Ils décident de se répartir ce qu'il reste équitablement. Combien reçoit en plus chaque personne ? Quelle somme auront-ils reçu au total ?

20 *Démonstration de l'algorithme d'Euclide*

a et b sont deux entiers naturels, $a > b$.
On effectue la division euclidienne de a par b :
$a = b \times q + r$ où $r < b$.

a. Démontre que si d est un diviseur commun à a et b alors d est aussi un diviseur de r.

b. Démontre que si d' est un diviseur commun à b et r alors d' est aussi un diviseur de a.

c. Démontre que PGCD $(a\ ;\ b)$ = PGCD $(b\ ;\ r)$.

21 *Pages*

Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

22 *Énigmes*

a. Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est 2 285 et le PGCD est 457. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b. Trouve deux nombres entiers naturels dont le PGCD est égal à 8 et dont le produit est 960. Y a-t-il plusieurs solutions ?

23 *Timbres*

Un philatéliste possède 17 017 timbres français et 1 183 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, comportant le même nombre de timbres français et le même nombre de timbres étrangers.
Calcule le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser et dans ce cas, le nombre de timbres de chaque sorte par lot.

Exercices d'approfondissement

24 *Tempête*

Des poteaux téléphoniques étaient plantés le long d'une route, sur une ligne droite et régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.
Après une tempête, il n'en reste plus que trois : le premier et le dernier puis un autre situé entre les deux, à 345 m du premier et 184 m du dernier. Un technicien arrivé sur les lieux estime le nombre de poteaux tombés à plus de 10 mais moins de 100 !
Combien de poteaux sont-ils tombés ?

25 *Soyons tous à l'heure*

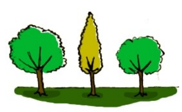
a. La montre d'Éric sonne toutes les six heures et celle de Leïla, toutes les 14 heures. Elles ont sonné ensemble le 9 octobre à 17h30.
À quelle date et à quelle heure sonneront-elles ensemble de nouveau ?

b. Même question si la montre d'Éric sonne toutes les 15 heures et celle de Leïla toutes les 21 heures.

26 *Arbres*

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m et 1 008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?



27 *Piscine*

Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m.
On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux mais préfère les grands carreaux, plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a. Quelle taille de carreaux doit-il commander ?

b. Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

28 *Entiers naturels consécutifs*

a. Calcule le PGCD de 34 et 35 puis celui de 456 et 457.

b. Quelle conjecture peux-tu faire ? Démontre cette conjecture.

29 *Premiers entre eux*

a. Démontre que les entiers naturels k et $2k + 1$ sont premiers entre eux pour n'importe quelle valeur de k.

b. Même question avec $k + 1$ et $2k + 1$.

c. Déduis-en des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

30 Rends la fraction $\dfrac{11\,413}{14\,351}$ irréductible.

31 Soit $C = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{9}$.

a. En écrivant la liste des premiers multiples de chacun des dénominateurs, trouve le dénominateur commun aux trois fractions le plus petit possible.

b. Calcule C et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

c. Procède de la même façon pour calculer $D = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4}$.

32 *Addition*

a. Soit $G = \dfrac{3\,575}{4\,225}$.
Écris G sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Soit $H = G + \dfrac{4}{26}$.
Écris H sous la forme d'un nombre entier. Indique le détail des calculs.

33 Calcule $J = \dfrac{575}{161} - \dfrac{45}{21}$. (Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.)

34 Calcule en détaillant les étapes et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$$A = \frac{24 \times 9 \times 72 \times 121}{36 \times 33 \times 64}$$

$$B = 56 \times \frac{15}{128} - \frac{1}{18}$$

$$C = \left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times \frac{20}{33}$$

$$D = \frac{81}{63} \div \left(4 - \frac{2}{14}\right)$$

$$E = \frac{56}{15} \times \frac{\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{4}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}}$$

$$F = 3 + \frac{2}{15} \times \left(5 \times \frac{23}{25} - \frac{12}{49} \div \frac{9}{14}\right) \div \frac{1}{70}$$