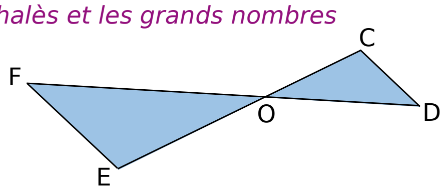
Exercices d'approfondissement

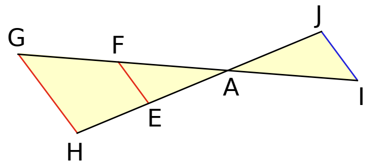
1 *Thalès et les grands nombres*



Sur la figure ci-dessus, les droites (DF) et (CE) sont sécantes en O. De plus, on donne OE = 1 203,17 ; OC = 1 056,23 ; OF = 1 264,09 et OD = 1 109,71.
Démontre que les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

2 *Extrait du Brevet*

On considère le schéma ci-dessous.



a. Les droites (IG) et (JH) se coupent en un point A. Le point E est sur (JH) et le point F est sur (IG). Les droites (EF) et (HG) sont parallèles.
On a AE = 3 cm ; AF = 4 cm ; AH = 7 cm et EF = 6 cm.

Calculer les longueurs AG et HG en justifiant la démarche utilisée. Donner les résultats sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible.

b. On a AI = 6 cm et AJ = 4,5 cm. Les droites (IJ) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifier la démarche utilisée.

3 Dans un triangle ABC, on place un point D sur le segment [BC]. La parallèle à (AB) passant par D coupe [AC] en E et la parallèle à (AC) passant par D coupe [AB] en F.

a. Compare $\frac{AF}{AB}$ et $\frac{CD}{CB}$ puis $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{BD}{BC}$.

b. Où faut-il placer le point D pour que les droites (EF) et (BC) soient parallèles ?

4 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O de rayon 3 cm et $\mathscr{C}'$ un cercle de centre O' de rayon 5 cm tangent en I au cercle $\mathscr{C}$.

a. On considère une tangente commune aux deux cercles qui ne passe pas par I ; elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en T, le cercle $\mathscr{C}'$ en T' et la droite (OO') en A.
Démontre que (OT) et (O'T') sont parallèles.

b. À quelle distance du point O se trouve le point A ? Justifie ta réponse.

5 On considère un triangle ADF tel que AD = 6,4 cm ; AF = 8 cm et DF = 4,8 cm.

a. Construis le triangle ADF puis démontre qu'il est rectangle en D.

b. Place le point B sur (AD) tel que AB = 4 cm et B $\notin$ [AD]. La perpendiculaire à (AD) passant par B coupe (AF) en C.
Démontre que les droites (BC) et (DF) sont parallèles.

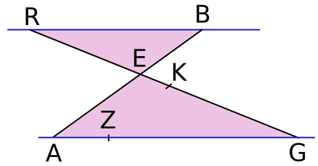
c. Calcule AC et BC.

6 *Extrait du Brevet*

Sur la figure ci-dessous, les droites (AG) et (RB) sont parallèles ; les droites (AB) et (RG) se coupent en E.

L'unité de longueur est le centimètre.

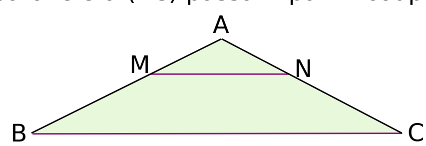
On donne BE = 3 ; AE = 5 ; AG = 10 et EG = 8.



a. Calculer les distances RB et RE.

b. On donne GK = 6,4 et GZ = 8. Montrer que les droites (ZK) et (AE) sont parallèles.

7 Dans le triangle ABC ci-dessous, on donne AB = 6 cm et BC = 9 cm.
M est le point de [AB] tel que AM = 2 cm. La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.



a. Calcule MN.

b. Calcule la valeur exacte de $\frac{AN}{AC}$.

c. On suppose que [NC] mesure 4,4 cm.
Calcule AN et AC.

8 Construis un triangle EFG rectangle en E tel que EG = 15 cm et EF = 10 cm.

a. Calcule FG arrondie au millimètre.

b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$ arrondie au degré.

c. La bissectrice (d) de l'angle $\widehat{EFG}$ coupe [EG] en H. Calcule FH et EH, arrondies au millimètre.

d. La parallèle à (EF) passant par G coupe (d) en K. Calcule GK arrondie au millimètre.

9 *Thalès et réciproque*

a. Construis un triangle ROC et un triangle ARC de telle sorte que les points A et O soient placés de part et d'autre de la droite (RC).

b. Place un point F sur [AR]. La parallèle à (AC) passant par F coupe [RC] en G et la parallèle à (OC) passant par G coupe [RO] en H.

c. Montre que $\frac{RF}{RA} = \frac{RG}{RC}$ puis que $\frac{RG}{RC} = \frac{RH}{RO}$.

d. Démontre que les droites (FH) et (OA) sont parallèles.

10 *Thalès et calcul littéral*

Construis un triangle RST tel que RS = 10 cm ; RT = 14 cm et ST = 12 cm. Place un point M sur [RS]. On pose RM = x cm. La parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.

a. Exprime le périmètre du triangle RMN en fonction de x.

b. Exprime le périmètre du trapèze MSTN en fonction de x.

c. Où faut-il placer le point M pour que les deux périmètres soient égaux ?

11 *Thalès et résolution d'équation*

Soit ABC un triangle tel que AC = 11 cm ; AB = 7 cm et BC = 8 cm. Soit M un point du segment [BC]. On pose BM = x. La parallèle à (AC) passant par M coupe [AB] en P et la parallèle à (AB) passant par M coupe [AC] en Q.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M pour que MP + MQ = 9 cm.

a. Exprime MP puis MQ en fonction de x.

b. Détermine la position du point M sur le segment [BC] à l'aide d'une résolution d'équation.

12 Trace un rectangle ABCD et place le point M du segment [BC] tel que $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$.

On appelle N le point d'intersection des droites (AM) et (DC).

a. Démontre que le triangle MNC est une réduction du triangle ABM et précise le coefficient de réduction.

b. Démontre que le triangle MNC est aussi une réduction du triangle AND et précise le coefficient de réduction.

c. Pour AB = 12 cm et BC = 9 cm, calcule l'aire du triangle MNC.

13 BLEU est un parallélogramme tel que LE = 50 cm ; EU = 40 cm et BE = 75 cm. O est le point de la droite (BE) tel que OE = 30 cm et O n'appartient pas à [BE]. La parallèle à (EU) passant par O coupe (LE) en S et la parallèle à (LE) passant par O coupe (EU) en R.

a. Calcule ES et ER.

b. Montre que ROSE est un parallélogramme. Déduis-en que ROSE est une réduction du parallélogramme BLEU et détermine le coefficient de réduction.

c. On appelle h la hauteur issue de B dans le triangle BEU. Sachant que l'aire de BLEU est égale à 1 550 cm², détermine h.

d. Calcule l'aire de ROSE.

14 L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que AB = 9 ; AC = 15 et BC = 12.

a. Démontre que ABC est rectangle en B.

b. Calcule l'aire du triangle ABC.

c. Trace en vraie grandeur le triangle ABC.
E est le point du segment [AB] tel que AE = 3.
F est le point du segment [AC] tel que AF = 5.

d. Démontre que la droite (EF) est parallèle à la droite (BC).

e. Calcule EF.

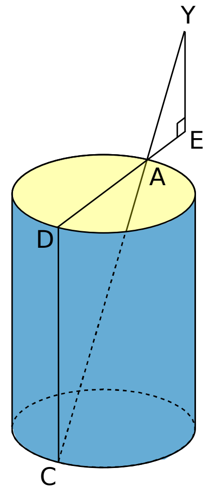
f. Calcule l'aire du trapèze BEFC de deux façons différentes.

15 *Extrait du Brevet*

[AD] est un diamètre d'un puits de forme cylindrique.
Le point C est à la verticale de D, au fond du puits.

Une personne se place en un point E de la demi-droite [DA) de sorte que ses yeux soient alignés avec les points A et C.
On note Y le point correspondant aux yeux de cette personne.

On sait que AD = 1,5 m ; EY = 1,7 m et EA = 0,6 m.

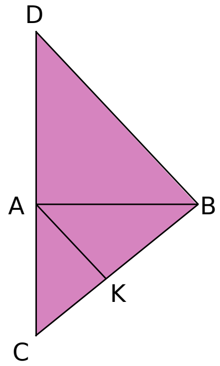


a. Démontrer que les droites (DC) et (EY) sont parallèles.

b. Calculer DC, la profondeur du puits.

16 *Thalès et autres propriétés*

La figure commencée ci-dessous est à construire et à compléter au fur et à mesure des questions.



On donne AC = 4,2 cm ; AB = 5,6 cm et BC = 7 cm.
K est le point du segment [BC] tel que CK = 3 cm. La parallèle à la droite (AK) passant par B coupe la droite (AC) en D.

a. Démontre que le triangle ABC est rectangle.

b. Calcule CD.

c. Calcule AD ; déduis-en que le triangle ADB est un triangle rectangle isocèle.

d. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DBA}$.

e. Démontre que l'angle $\widehat{KAB}$ est égal à 45°.
Que peux-tu en déduire pour la droite (AK) ?

f. La perpendiculaire à (AB) passant par K coupe (AB) en E et la perpendiculaire à (AC) passant par K coupe (AC) en F.
Démontre que le quadrilatère AEKF est un rectangle.

g. Calcule KE et KF.
Quelle précision peux-tu alors apporter quant à la nature du quadrilatère AEKF ?

17 *Thalès et bissectrice*

Voici l'énoncé d'une propriété de la bissectrice d'un angle dans un triangle :

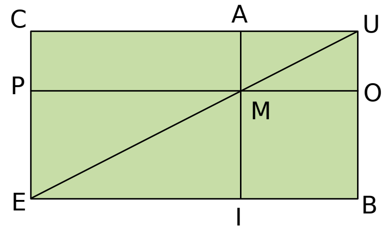
> *Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ partage le côté [BC] en deux segments [BK] et [CK] qui vérifient l'égalité* $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$.

a. Soit ABC un triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté [BC] en K. La parallèle à (AK) passant par C coupe (AB) en D.
Démontre que le triangle ADC est isocèle en A.

b. Démontre l'égalité proposée dans la propriété ci-dessus.

18 *Des rectangles*

a. Construis un rectangle CUBE.
On pose CU = L et CE = l.



b. Construis à la règle et au compas le point M du segment [UE] tel que UM = $\frac{2}{5}$ UE.

c. On appelle A, P, I et O les points d'intersection respectifs des droites passant par M et perpendiculaires aux droites (CU), (CE), (EB) et (BU).

d. Exprime en fonction de L ou l les longueurs MA, MI, MP et MO.

e. Compare les aires des rectangles CAMP et MOBI.

19 *Thalès sans valeur numérique*

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de B coupe [AC] en D et la hauteur issue de C coupe [AB] en E. Dans le triangle ADE, la hauteur issue de D coupe [AE] en F et la hauteur issue de E coupe [AD] en G.

a. Démontre les égalités :
AD × AE = AB × AG = AC × AF.

b. Démontre que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

20 *Dur, dur, dur*

On considère un rectangle ABCD. On place sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA], les points E, F, G et H tels que $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = k$ où k est un nombre compris entre 0 et 1.

a. Démontre que les droites (EH) et (FG) sont parallèles.

b. Démontre que $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$ puis que $\frac{DG}{DC} = \frac{DH}{DA}$.

c. Démontre que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

d. Démontre que le périmètre du parallélogramme EFGH reste constant lorsque k varie.