Activités de découverte

Activité 1 : Le triangle de Sierpinski

1. Répondre avec des 3 et des × uniquement !

La figure de départ est un triangle équilatéral violet. On construit à l'intérieur de celui-ci un triangle bleu obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle de départ.

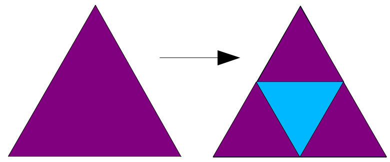

figure de départ figure 1

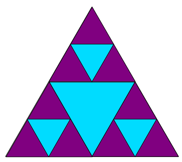

figure 2

a. De la même façon, on construit un petit triangle bleu dans chacun des triangles violets de la figure 1. Combien obtient-on de triangles violets dans la figure 2 ?

b. Imaginons que l'on continue à construire des triangles bleus dans les triangles violets. Combien a-t-on de triangles violets dans la figure 4 ? Puis dans la figure 7 (en n'utilisant encore que des 3 et des signes ×) ? Et dans la figure 20 ?

2. Une nouvelle notation : la notation « puissance »

La notation « puissance » est utilisée pour remplacer des produits comme dans les exemples suivants :

- $9 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ facteurs}} = 3^2$ qui se lit « 3 au carré » ou « 3 puissance 2 » ou « 3 exposant 2 »,
- $81 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ facteurs}} = 3^4$ qui se lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».

a. Écris, à l'aide de la notation « puissance », le nombre de triangles violets qu'il y a dans la figure 7 puis calcule ce nombre. Recommence pour la figure 20.

b. À l'aide de ta calculatrice, indique combien il y a de triangles violets dans la figure 13, la figure 18, la figure 10 et enfin dans la figure 15. Existe-t-il un moyen d'effectuer ces calculs facilement avec ta calculatrice ?

Activité 2 : Des produits avec 2, 3 et 5

1. Nous allons exprimer certains nombres sous la forme de produits. Dans cette activité, les seuls facteurs autorisés sont : 2 ; 3 et 5. Nous utiliserons la notation « puissance » dès que cela est possible.

Exemples :
$25 = 5 \times 5$ peut s'écrire $25 = 5^2$;
$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ peut s'écrire $48 = 2^4 \times 3$;
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ peut s'écrire $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

a. Exprime de la même façon les nombres 4 ; 12 ; 27 ; 30 ; 45 et 108. Peut-on exprimer le nombre 26 de la même façon ? Justifie.

b. Un élève a écrit l'égalité suivante : $54 = 2^1 \times 3^3$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 2^1 ?

c. Un élève a écrit l'égalité suivante : $50 = 2^1 \times 3^0 \times 5^2$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 3^0 ?

d. Réécris les trois exemples du départ puis les nombres de la question **a.** sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ (a, b et c sont des nombres entiers, éventuellement égaux à 0 ou 1).

e. Trouve le plus possible de nombres inférieurs à 100 qui peuvent s'exprimer sous la forme d'un produit ne comportant que des 2, des 3 et des 5.

2. On peut programmer un tableur pour qu'il calcule un produit lorsqu'on lui indique combien celui-ci comporte de 2, de 3 et de 5.

a. À l'aide du tableur, vérifie les résultats que tu as obtenus à la question **1.e.** puis poursuis ta recherche.

b. Comment être certain d'avoir terminé cette recherche ?

	A	B	C	D	E
1	2	Puissance	1	=	2
2	3	Puissance	1	=	3
3	5	Puissance	1	=	5
4					
5		Produit final		=	30

Activité 3 : Avec un exposant négatif

1. En utilisant le fait que $5^5 = 3\,125$, Camille sait calculer 5^6 à l'aide de sa calculatrice, sans utiliser la touche « puissance ».

a. Comment fait Camille ? Calcule 5^6 avec sa méthode puis 5^7 et 5^8.

b. En utilisant à nouveau le fait que $5^5 = 3\,125$, calcule maintenant 5^4 ; 5^3 et 5^2 le plus facilement possible (sans faire de multiplication, ni de calcul de puissance).
Combien valent 5^1 et 5^0 ?

2. En utilisant à nouveau sa calculatrice, Camille a découvert que $5^{-1} = 0{,}2$.

a. Vérifie à l'aide de ta calculatrice puis essaie d'expliquer pourquoi ce résultat était prévisible. Écris 0,2 sous la forme d'une fraction irréductible.

b. À l'aide de divisions, calcule 5^{-2} et 5^{-3} et écris chaque nombre sous la forme d'une fraction. Que remarques-tu ?

c. Sans utiliser ta calculatrice, écris chaque nombre 2^{-1} ; 2^{-2} et 2^{-3} sous la forme d'une fraction.

d. Sans utiliser ta calculatrice, écris chaque nombre 7^{-4} ; 7^{-20} et 7^{-1000} sous la forme d'une fraction (tu peux utiliser la notation « puissance » au dénominateur).

Activité 4 : Ecriture décimale d'une puissance de 10

1. Donne l'écriture décimale des nombres suivants : 10^3 ; 10^5 et 10^9.

2. Recopie puis complète : « L'écriture décimale de 10^{12} est un 1 suivi de ... zéros. »

3. Écris sous la forme d'une puissance de 10 les nombres suivants :
100 ; 1 000 000 et 1 000 000 000 000 000 000.

4. Donne l'écriture décimale des nombres suivants : 10^{-2} ; 10^{-6} et 10^{-8}.

5. Recopie puis complète : « L'écriture décimale de 10^{-12} comporte ... zéros suivis d'un 1 (la virgule étant placée après le premier ...). »

6. Écris sous la forme d'une puissance de 10 les nombres suivants :
0,001 ; 0,000 000 01 et 0,000 000 000 000 000 1.

Activité 5 : Opérations avec des puissances de 10

1. Produit de puissances de 10

$$10^2 \times 10^3 = \underbrace{\underbrace{10 \times 10}_{\text{... facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{... facteurs}}}_{\text{... facteurs au total}} = 10^{\cdots} \qquad 10^5 \times 10^4 = \underbrace{\underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{\text{... facteurs}} \times \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{\text{... facteurs}}}_{\text{... facteurs au total}} = 10^{\cdots}$$

a. Recopie puis complète les expressions ci-dessus.

b. Calcule de la même façon : $10^5 \times 10^8$ et $10^7 \times 10^6$.

c. Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $10^n \times 10^p = 10^{\cdots}$.

2. Quotient de puissances de 10

a. Si on décompose $\frac{10^5}{10^2}$, on obtient $\frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$.
Simplifie cette fraction et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

b. Recommence avec les fractions suivantes : $\frac{10^7}{10^5}$ et $\frac{10^3}{10^2}$.

c. Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots}$.

3. Puissance de puissances de 10

a. Compte le nombre de facteurs 10 contenus dans l'écriture décomposée de $(10^2)^3$

b. Recommence avec $(10^3)^5$. Combien aurait-on de facteurs 10 dans $(10^5)^8$?

c. Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $(10^n)^p = 10^{\cdots}$.

4. Les formules obtenues précédemment sont-elles encore valables pour n et p entiers négatifs ? Justifie.

Activité 6 : Toutes sortes de puissances

1. Des chinois sous différentes formes

La Chine compte actuellement environ 1 300 000 000 habitants. Donne le nombre d'habitants de la Chine en milliards ? Combien cela fait-il en millions ? Et en milliers ?
Complète : 1 300 000 000 = … × 10^9 = … × 10^6 = … × 10^3.

2. Distances astronomiques

Dans le domaine de l'astronomie, le parsec sert à mesurer de très grandes distances entre les astres. Un parsec correspond à environ $3{,}086 \times 10^{16}$ m.
Complète : 1 parsec = $3{,}086 \times 10^{16}$ m = … cm = … km = … mm.

3. Globules rouges

La taille moyenne d'un globule rouge est 7×10^{-6} m.
Complète : 7×10^{-6} m = … cm= … mm.

Activité 7 : Une nouvelle écriture d'un nombre

1. Des nombres de plus en plus grands

a. À l'aide de ta calculatrice, détermine la valeur du produit suivant : 32 768 × 15 625.

b. Détermine, sans utiliser ta calculatrice, l'écriture décimale de 327 680 × 156 250 (pense à utiliser le résultat précédent).

c. Vérifie le résultat obtenu ci-dessus à l'aide de ta calculatrice. Obtiens-tu le même résultat ?

d. Détermine, toujours sans utiliser ta calculatrice, l'écriture décimale de 327 680 000 × 1 562 500.

e. Vérifie le résultat obtenu ci-dessus à l'aide de ta calculatrice. Obtiens-tu le même résultat ?

2. La notation scientifique des grands nombres

a. Effectue les calculs suivants à l'aide de la calculatrice :

$$A = 9\ 620\ 000\ 000 + 9\ 870\ 000\ 000 \text{ ; } B = 262\ 144 \times 3\ 906\ 250 \text{ et } C = 30^9.$$

Trop de chiffres composent ces nombres pour que la calculatrice les affiche tous. Dans ce cas, la calculatrice affiche le produit d'un nombre par une puissance de 10. Il s'agit ici de l'écriture scientifique du nombre.

b. Quels résultats affiche la calculatrice lorsqu'on lui fait calculer les produits suivants :

$$D = 791 \times 10^{15} \text{ et } E = 1\ 298{,}4 \times 10^{13} \text{ ?}$$

c. Dans les écritures scientifiques obtenues précédemment, comment semble être le nombre affiché par la calculatrice avant la puissance de 10 ? Vérifie ta conjecture sur d'autres exemples et affine un encadrement de ce nombre.

Activité 8 : L'infiniment petit

Les experts de la physique rencontrent bien souvent dans leurs recherches des objets (que l'on appelle particules) invisibles à l'oeil nu. Pour les mesurer, ils utilisent des unités spécifiques aux petites mesures.

a. Recherche au C.D.I. ou sur Internet à quoi correspondent : un micromètre, un nanomètre, un picomètre et un femtomètre. Quelles abréviations correspondent à ces unités ?

b. Combien de micromètres forment un millimètre ? Combien de nanomètres forment un micromètre ? Que remarques-tu ?

c. Un cheveu mesure environ 80 micromètres de diamètre. Convertis cette mesure en mètres.

d. Le virus du SIDA mesure approximativement 100 nanomètres. Convertis cette mesure en mètres.

e. L'une des petites particules qu'étudient les physiciens est le proton dont la mesure est approximativement 0,8 femtomètres. Convertis cette mesure en mètres.

f. En micro-électronique, on utilise des composants appelés transistors. De nos jours, les plus petits transistors mesurent 0,065 micromètres. Sont-ils plus petits ou plus grands que le virus du SIDA ?