

## Activité 1 : De nouveaux nombres

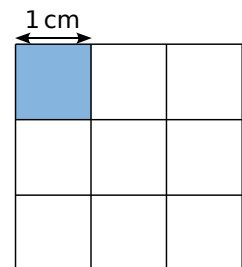
### 1. Quelques racines carrées simples

- Trouve tous les nombres dont le carré est 16.  
Même question avec 0,81.
- Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres qui ont le même carré, que peux-tu dire de  $a$  et  $b$  ? Justifie.
- Donne la mesure du côté du carré ci-contre.
- Donne la mesure du côté d'un carré dont l'aire est  $0,49 \text{ cm}^2$ .
- Trace un carré d'aire  $36 \text{ cm}^2$ . On appelle  $d$  le côté de ce carré en centimètre. Quelle relation existe-t-il entre  $d$  et 36 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.



### 2. Un carré d'aire 2

- Peux-tu tracer un carré dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre (tu pourras t'aider du quadrillage si tu le désires) ? Compare ta réponse avec celle de tes camarades.
- On appelle  $c$  le côté de ce carré en centimètre.  
Quelle relation existe-t-il entre  $c$  et 2 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.
- Peux-tu donner une écriture décimale de  $c$  ?



### 3. La notation racine carrée

Le nombre positif dont le carré est 36 est noté  $\sqrt{36}$  et se lit « racine carrée de 36 ».  
On a vu dans les questions précédentes que  $\sqrt{36} = 6$ .  
Le nombre positif dont le carré est 2 est noté  $\sqrt{2}$  et se lit « racine carrée de 2 ».

- Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifie.
- À l'aide de la calculatrice, donne une valeur approchée au dix-millième de  $\sqrt{2}$ .
- Recopie et complète le tableau suivant, en utilisant ta calculatrice.  
Les valeurs seront arrondies au millième.

| $a$        | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $\sqrt{a}$ |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |

- Que remarques-tu ?
- Certains nombres entiers ont une racine carrée entière. On dit que ces nombres sont des carrés parfaits. Cite tous les carrés parfaits compris entre 0 et 256.

### 4. Premiers calculs

- Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont égaux à 13 ?

$$\sqrt{13^2} ; \sqrt{13} ; (\sqrt{13})^2 ; \sqrt{(-13)^2} ; 13^2$$

- Quelles sont les valeurs exactes de  $E = \sqrt{7^2}$  et  $F = \sqrt{(\pi - 5)^2}$  ?

## Activité 2 : Approximation d'une racine carrée

### 1. Avec la calculatrice

- On veut déterminer une valeur approchée de  $\sqrt{33}$ .  
Sans calculatrice, donne un encadrement à l'unité de ce nombre.
- Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, donne un encadrement de  $\sqrt{33}$  au dixième.

| N              | 5 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 | 5,7 | 5,8 | 5,9 | 6 |
|----------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| N <sup>2</sup> |   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |

### 2. Avec un tableur

- Construis la feuille de calcul suivante.

|   | A              | B | C | D | F | F | G | H | I | I | K | I |
|---|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Pas            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 | N              | 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 6 |
| 3 | N <sup>2</sup> |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

- Quelle formule dois-tu écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permette d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?  
Complète la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1 puis recopie la formule jusqu'en K2 (pour recopier la formule sans changer B1, écris \$B\$1 au lieu de B1).
- Complète la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2 puis recopie la formule jusqu'à L3.
- Observe le tableau et donne un encadrement de  $\sqrt{33}$  au dixième près.
- Remplace le contenu de B2 et de L2 par les bornes de ton encadrement.  
Quel encadrement de  $\sqrt{33}$  obtiens-tu ? Quelle est sa précision ?
- Recommence la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de  $10^{-6}$ . (Tu peux changer le format d'affichage des nombres.)
- Utilise ta feuille de calcul pour obtenir une approximation de  $\sqrt{125}$  à  $10^{-4}$  près.

## Activité 3 : Somme de deux racines carrées

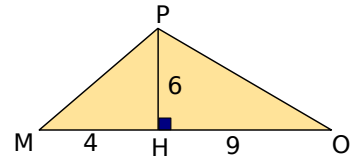
Dans toute cette activité, on prendra comme unité : 1 u = 5 cm.

- Construis un carré OUBA de côté 1 u. Trace le cercle de centre O et de rayon OB. Il coupe la demi-droite [OU) en C. Calcule OC en utilisant l'unité de mesure choisie.
- Trace la droite perpendiculaire à (OU) passant par C. Elle coupe (AB) en C'. Le cercle de centre O, de rayon OC' coupe [OU) en D. Calcule OD dans l'unité de mesure choisie.
- En t'inspirant des questions précédentes, construis le point F de la demi-droite [OU) tel que  $OF = \sqrt{5}$  u.
- Place le point G sur la demi-droite [OU) tel que  $OG = OC + OD$ .  
Quelle est la mesure exacte de OG ?  
Compare OF et OG. Que peux-tu en déduire ?

### Activité 4 : Produit de deux racines carrées

#### 1. Conjecture

- Quelle est l'aire du triangle POM ?
- Démontre que POM est un triangle rectangle.
- Calcule l'aire de ce triangle d'une deuxième manière.
- En t'aidant des résultats trouvés dans les questions **a.** et **c.**, écris  $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$  sous la forme  $\sqrt{c}$  où  $c$  est un nombre entier. Déduis-en un moyen de calculer  $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$  d'une autre manière.
- Recopie et complète le tableau suivant pour confirmer ta conjecture.



| $a$ | $b$ | $\sqrt{a \times b}$ | $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ |
|-----|-----|---------------------|----------------------------|
| 4   | 16  |                     |                            |
| 5   | 2   |                     |                            |
| 100 | 64  |                     |                            |
| -2  | -3  |                     |                            |

#### 2. Démonstration

On va démontrer que  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  pour tous nombres  $a$  et  $b$  **positifs**.  
L'idée de la démonstration est d'élever au carré chacun des termes de l'égalité.

- Pourquoi  $a$  et  $b$  doivent-ils être positifs ?
- Calcule  $(\sqrt{a \times b})^2$  et  $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$  puis conclus.

#### 3. Exemples

- Sans calculatrice, calcule les nombres suivants :

$$A = \sqrt{5} \times \sqrt{45} ; B = \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}$$

- Calcule de même  $D = \sqrt{2} \times \sqrt{18}$  et  $E = \sqrt{27} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8}$ .

- Développe et réduis les expressions suivantes :

$$F = 3\sqrt{2} (7\sqrt{2} - \sqrt{5}) ; G = (\sqrt{7} + 2)(15 - \sqrt{3})$$

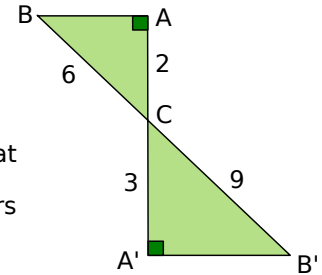
#### 4. Application aux simplifications de racines

- Décompose 12 sous la forme d'un produit de deux entiers.  
Combien y a-t-il de possibilités ? Laquelle permet de simplifier  $\sqrt{12}$  ?
- Même question avec  $\sqrt{45}$ .
- Quelle méthode peux-tu utiliser pour simplifier une racine carrée ?
- Écris les nombres suivants sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers positifs avec  $b$  le plus petit possible :  $\sqrt{72}$  ;  $\sqrt{75}$  ;  $\sqrt{32}$ .

## Activité 5 : Quotient de deux racines carrées

### 1. Conjecture

- Calcule la valeur de  $\frac{AB}{A'B'}$ .
- En utilisant la définition d'une racine carrée, écris le résultat précédent sous la forme  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers positifs avec  $b \neq 0$ .
- Calcule  $AB$  puis  $A'B'$ .
- Compare les deux écritures de  $\frac{AB}{A'B'}$  et trouve un moyen pour simplifier  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$ .
- Recopie et complète le tableau suivant et déduis-en une méthode de simplification de quotients de racines carrées.



| $a$ | $b$ | $\sqrt{\frac{a}{b}}$ | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ |
|-----|-----|----------------------|-----------------------------|
| 25  | 16  |                      |                             |
| 100 | 64  |                      |                             |
| 49  | 9   |                      |                             |
| -2  | -4  |                      |                             |

### 2. Démonstration

On va démontrer que, si  $a$  est positif et  $b$  est strictement positif alors  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

- Pourquoi  $a$  doit-il être positif et  $b$  strictement positif ?
- Démontre l'égalité.

## Activité 6 : Équation du type $x^2 = a$

- Quels sont les nombres dont le carré est 49 ? 225 ? 7 ?
- Existe-t-il des nombres dont le carré est -9 ? -36 ? -7 ? Justifie.
- Selon toi, combien existe-t-il de solution(s) pour les équations suivantes ?
  - $x^2 = 16$
  - $x^2 = 13$
  - $x^2 = -4$
- Factorise  $x^2 - 10$  puis résous l'équation  $x^2 = 10$ .
- Combien de solutions a l'équation  $(x + 2)^2 = 5$  ?
- Résous l'équation  $(x + 2)^2 = 5$ .

### Activité 7 : Le point sur les nombres

#### 1. Les ensembles de nombres

Voici une liste de nombres.

$$-\frac{457}{23} ; 4\sqrt{2} ; 854 ; 0,000\,08 \times 10^7 ; \sqrt{49} ; \pi ; \frac{174}{58} ; -0,000\,415\,7 ; -\sqrt{\frac{4}{9}} ; \frac{58}{4} ; 10^{-3}$$

- Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?
- Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?
- Y a-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire ?
- Y a-t-il des nombres qui ne rentrent dans aucune des catégories précédentes ?

#### 2. Rationnel ou pas ?

- $\sqrt{2}$  n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal. Est-ce un nombre rationnel ?

Dans cette partie, on suppose que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel et qu'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  :  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  où  $\frac{p}{q}$  est un quotient irréductible. Démontre que  $2q^2 = p^2$ .

- Dans cette question, on va étudier la divisibilité de  $p^2$  et de  $2q^2$  par 2 et par 5. Pour cela, recopie et complète les tableaux ci-dessous.

|                                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si le chiffre des unités de $p$ est      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| alors le chiffre des unités de $p^2$ est |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

|                                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si le chiffre des unités de $q$ est      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| alors le chiffre des unités de $q^2$ est |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| et le chiffre des unités de $2q^2$ est   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

- En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont), selon toi, le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de  $p$  et  $q$  quand  $2q^2 = p^2$  ?
- La fraction  $\frac{p}{q}$  est-elle irréductible ? Qu'en déduis-tu pour le nombre  $\sqrt{2}$  ?

#### 3. Une autre démonstration

- On suppose que  $\sqrt{2}$  est un quotient de deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  donc il peut s'écrire sous la forme  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  où  $\frac{p}{q}$  est un quotient irréductible. Démontre que  $2q^2 = p^2$  et déduis-en que  $p^2$  est pair.
- En utilisant la propriété énoncée dans l'exercice 7 des approfondissements du chapitre N1, démontre que  $p$  est pair.
- $p$  étant pair,  $p$  peut s'écrire sous la forme  $2p'$ . Calcule alors  $q^2$ .  
Que peux-tu en déduire pour la parité de  $q$  ? Que peux-tu dire de la fraction  $\frac{p}{q}$  ?