Exercices de synthèse

1 *Des bases en calcul numérique (relatifs, fractions, puissances)*

$A = (-1+4)\times(-1-2)-10\div(-5)$ $\qquad B = \frac{7}{5}+\frac{6}{5}\times\frac{2}{3}$ $\qquad C = \frac{3\times10^{2}\times4\times10^{-9}}{25\times10^{-3}}$

- Calculer A en détaillant les étapes intermédiaires.
- Calculer B en détaillant les calculs et en donnant le résultat sous forme simplifiée.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de C.

2 *Des bases en calcul numérique (relatifs, fractions, puissances), bis*

$M = (-3)^2-[2-5\times(3-7)]$ $\qquad N = \frac{5}{7}-\frac{2}{7}\div(-3)$ $\qquad P = \frac{5\times10^{-3}\times1{,}2\times10^{5}}{2\times10^{-1}\times1{,}5\times10^{6}}$

- Calculer M en détaillant les étapes intermédiaires.
- Calculer N en détaillant et en donnant le résultat sous forme de fraction.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de P.

3 *Des calculs numériques au Brevet (fractions, puissances, Groupe Nord, septembre 2005)*

$R = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ $\qquad S = \frac{2-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{4}}$ $\qquad T = \frac{3\times10^{4}\times10^{-2}\times5}{10^{-1}}$

- Calculer R et S en détaillant et en donnant les résultats sous forme simplifiée.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture scientifique de T.

4 *Des calculs numériques pour approfondir (relatifs, fractions, puissances)*

$E = \frac{14}{15}-\frac{1}{21}\times\frac{1}{\frac{9}{7}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$ $\qquad F = \frac{3{,}5\times10^{-11}\times2\times10^{8}}{0{,}2\times(10^{-3})^{3}}$ $\qquad G = (4\times10^{6})^{-2}$ $\qquad H = \frac{15\times10^{-4}}{42\times10^{-3}}$

- Démontrer que E est un nombre entier.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture scientifique de F puis celle de G.
- Calculer H sous forme de fraction simplifiée.

5 *Remplacer dans une expression*

a. Calculer $M = x^2 - 5x + 1$ pour $x = 0$ puis pour $x = -3$ et enfin pour $x = \frac{3}{5}$.

b. Calculer $N = -3x^2 + 6x - 4$ pour $x = -1$ puis pour $x = -0{,}1$ et enfin pour $x = -\frac{1}{3}$.

c. Calculer $P = 1 + 2a - a^2$ pour $a = -10$ puis pour $a = 10^3$ et enfin pour $a = -10^{-2}$.

d. Calculer $R = 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}$ pour $y = -\frac{2}{3}$ puis pour $y = 10^{-1}$.

6 *Développements, réductions et calculs numériques*

$E = (2x + 3)(5 - x)$ $\qquad F = (1 - 3x)(2x - 1) + 3x(1 - 4x)$

Développer et réduire E puis F. En choisissant ensuite l'écriture la plus adaptée, calculer E et F pour $x = -2$ puis pour $x = 5$ et enfin pour pour $x = \frac{1}{2}$.

7 *Développer puis réduire afin de simplifier*

a. Développer puis réduire P = $(2n + 1)(2n - 1) - 4n(1 + n)$.

b. En déduire un moyen astucieux pour calculer $2001 \times 1999 - 4000 \times 1001$.

8 *Développer, réduire puis calculer (vers une certaine maîtrise)*

R = $5x(2 - x) + (2x - 3)(4 - 7x)$ S = $2(4 + a)(1 - 3a) - (7a + 2)(5 - a)$ T = $(5y - 1)^2 - 4y(4y - 7)$

a. Développer et réduire R, S puis T (pour T, utiliser la définition du carré d'un nombre).

b. Calculer R pour $x = -10$ puis S pour $a = \frac{1}{5}$ et enfin T pour $y = \frac{-5}{3}$.

9 *Développement avec des coefficients fractionnaires*

Développer puis réduire F = $\frac{1}{3}\left(4x - \frac{6}{5}\right) - \left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{2}\right)\left(4 - \frac{2}{3}x\right)$ puis calculer F pour $x = -\frac{5}{2}$.

10 *À toute vitesse*

Partie A : Le graphique suivant représente la distance parcourue par un train entre deux villes A et B en fonction de l'heure.

a. Donner l'heure de départ et d'arrivée du train ainsi que la distance entre les villes A et B.

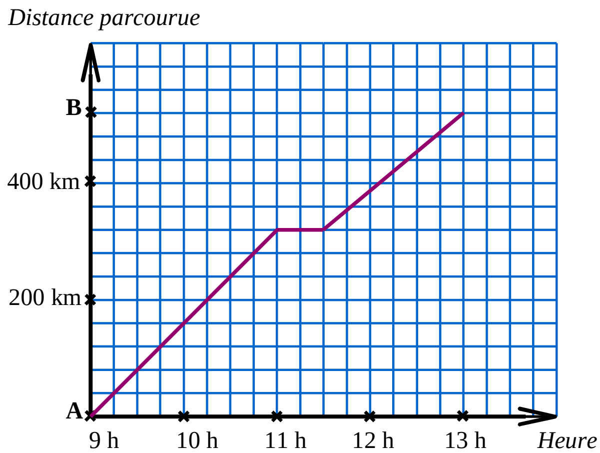
b. Quelle distance parcourt-il entre 9 h et 11 h ? Et entre 11 h 30 min et 13 h ? Que s'est-il passé entre 11 h et 11 h 30 min ?

c. Calculer la vitesse moyenne en km.h^{-1} du train entre 9 h et 11 h puis sa vitesse moyenne entre 11 h 30 min et 13 h.

d. Calculer sa vitesse moyenne en km.h^{-1} entre 9 h et 13 h.

e. Ce train effectue le trajet retour à la vitesse moyenne de 160 km.h^{-1} sans faire d'arrêt. Quelle est la durée du trajet retour ?

f. Calculer la vitesse moyenne du train en km.h^{-1} sur le parcours aller-retour (arrondir le résultat au dixième).



Partie B : Un autre train effectue 46 km en zone urbaine à 69 km.h^{-1} de moyenne.
Il poursuit ensuite son parcours en campagne pendant 1 h 35 min à une vitesse de 96 km.h^{-1}.

g. Calculer la durée du trajet en zone urbaine puis la longueur du trajet en campagne.

h. Calculer la vitesse moyenne du train sur l'ensemble du parcours (zone urbaine plus campagne).

11 *Des statistiques en vitesse*

La course des 24 heures du Mans consiste à effectuer en 24 heures le plus grand nombre de tours d'un circuit. Le tableau ci-dessous donne la répartition du nombre d'équipes ayant réussi à faire plus de 310 tours en 2003.

Nombre n de tours	$310 \leq n < 320$	$320 \leq n < 330$	$330 \leq n < 340$	$340 \leq n < 350$	$350 \leq n \leq 360$
Effectif	10	6	7	6	3

a. Donner l'effectif total de la série statistique ainsi définie.

b. Calculer le nombre d'équipes ayant parcouru au moins 320 tours.

c. Calculer la fréquence des équipes ayant parcouru plus de 320 tours.

d. Calculer le pourcentage d'équipes ayant parcouru moins de 320 tours.

e. Calculer le nombre moyen de tours par équipe (ici c'est une estimation puisque les données sont regroupées en classes).

f. Le tour du circuit des 24 heures du Mans est long de 13 650 m.

- Calculer, en km, la distance parcourue par un véhicule ayant fait 336 tours.
- Calculer, en $km.h^{-1}$, sa vitesse moyenne lors de cette course.

g. Une équipe avait fait 360 tours en 2002 contre seulement 342 tours en 2003 suite à des problèmes mécaniques. Exprimer en pourcentage la diminution du nombre de tours par rapport à l'année 2002.

h. Une autre équipe a vu au contraire son nombre de tours de 2002 augmenter de 4 % pour atteindre 338 tours en 2003. Combien de tours avait faits cette équipe en 2002 ?

12 *Statistiques, proportionnalité et graphiques, équation*

Dans une bibliothèque, on a comptabilisé, jour par jour, le nombre de livres prêtés au cours d'une semaine et on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Nombre de livres prêtés	61	121	42	59	82

a. Calculer le nombre moyen de livres prêtés par jour durant cette période.

b. Calculer le pourcentage, arrondi à l'unité, de livres prêtés le mercredi par rapport à la semaine entière.

c. Sur une année, la bibliothèque propose deux tarifs différents pour l'emprunt de ses livres :

- le tarif plein : 0,90 € par livre emprunté ;
- le tarif abonné : cotisation annuelle de 10 € à laquelle s'ajoute 0,50 € par livre emprunté.

Quel est le prix à payer suivant chaque tarif pour 5 livres ? 10 livres ? 20 livres ? 35 livres ? x livres ?
Rassembler les résultats dans un tableau.

d. Représenter graphiquement le prix à payer suivant les deux tarifs en fonction du nombre de livres empruntés (en abscisses, prendre 1 cm pour 5 livres empruntés, et en ordonnées, 1 cm pour 2 €).

e. Le prix tarif plein est-il proportionnel au nombre de livres empruntés ? Et le prix tarif abonné ? Expliquer en utilisant le graphique puis des calculs.

f. Déterminer graphiquement le nombre de livres pour lequel les deux tarifs sont équivalents puis retrouver ce résultat par le calcul.

g. Le prix de la cotisation annuelle (10 €) est en baisse de 20 % par rapport à l'année dernière.
Quel était le prix de la cotisation l'année dernière ?

13 *Synthèse : proportionnalité, statistiques (les deux parties du problème sont indépendantes)*

Trois amis, Pierre, Paul et Jacques, partent ensemble en vacances avec la voiture de Paul.

Partie A :

a. Le réservoir peut contenir jusqu'à 45 L et la jauge indique qu'il n'y a qu'un tiers du réservoir rempli. Paul fait alors le plein. À 1,25 € le litre, combien paie-t-il ?

b. Pierre et Jacques décident chacun de rembourser à Paul les deux cinquièmes du montant payé pour le plein. Combien Paul reçoit-il ?

c. Le trajet à effectuer fait 189 km. Au bout de 40 min, ils s'arrêtent. Ils ont fait 42 km.
Calculer leur vitesse moyenne en km.h^{-1} sur ce début de trajet.

d. Après une pause de 1 h 10 min, ils poursuivent leur trajet à 63 km.h^{-1} de moyenne.
Combien de temps mettront-ils pour finir le trajet (donner le résultat en heure-minute) ?

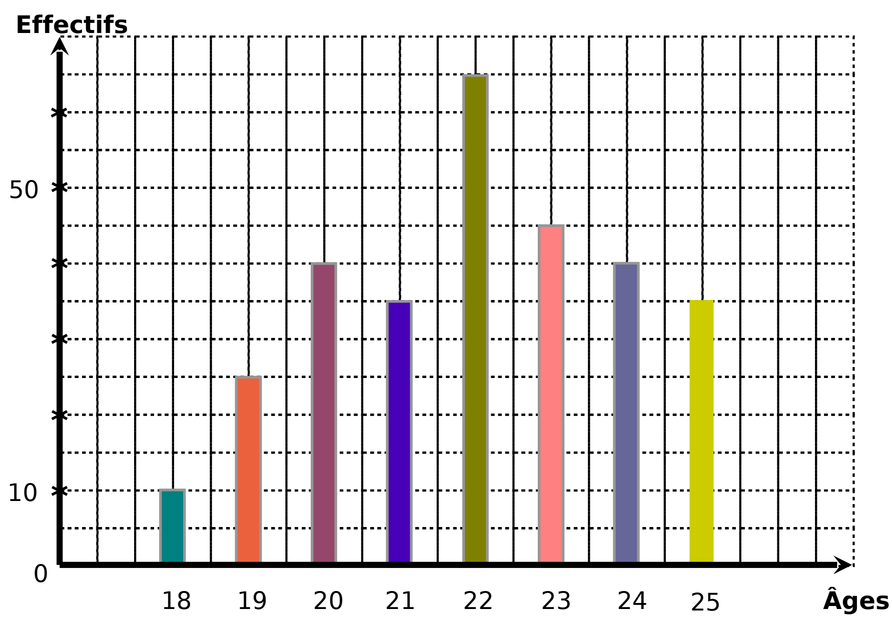
e. Calculer leur heure d'arrivée sachant qu'ils étaient partis à 11 h 30 min.

f. Ils louent un vélo pour trois pendant leur séjour pour un prix total de 43,20 €. Paul l'a utilisé quatre jours, Pierre cinq jours et Jacques les trois derniers jours. Comment doivent-ils se répartir équitablement le paiement ?

g. Ils paient chacun 48,60 € par jour pour leur demi-pension. Contents de leur séjour, ils souhaitent réserver pour leurs prochaines vacances. Le restaurateur leur fera une remise de 5 %. Combien paieront-ils par jour leur demi-pension lors de ces prochaines vacances ?

h. L'année dernière la demi-pension coûtait 45 € par jour. De quel pourcentage le prix a-t-il augmenté entre l'année dernière et cette année ?

Partie B :
Durant leur séjour, ils ont participé à une soirée 18-25 ans. Le diagramme suivant donne la répartition des participants à cette soirée suivant leurs âges.



a. Calculer l'effectif total des participants à cette soirée.

b. Calculer le pourcentage, arrondi à l'unité, des participants âgés de 21 ans.

c. Combien de participants avaient au moins 21 ans ? Quelle est la fréquence correspondante ?

d. Calculer l'âge moyen des participants à cette soirée.

14 *Triangles rectangles (Pythagore, cercle), parallélogramme, droites remarquables (d'après Brevet des Collèges, Paris, 2001)*

a. Tracer un segment [BC] tel que BC = 15 cm.
Placer un point A tel que AB = 9 cm et AC = 12 cm. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b. Placer le milieu M de [BC]. Tracer le cercle de diamètre [AB].
Ce cercle recoupe le segment [BC] en D et le segment [AM] en E.
Démontrer que les triangles ABE et ABD sont rectangles.

c. Construire le point F, symétrique du point E par rapport au point M.
Démontrer que le quadrilatère BECF est un parallélogramme.
En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, et que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.

d. Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE) et K celui des droites (AD) et (CF).
Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle ABM ?
En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires.
Démontrer de même que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.

e. On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH).
On appelle J le point d'intersection des droites (AC) et (KM).
Démontrer que le quadrilatère AIMJ est un rectangle. En déduire que le triangle HMK est rectangle.

15 *Triangle rectangle (Pythagore, cercle), Thalès, droites remarquables*

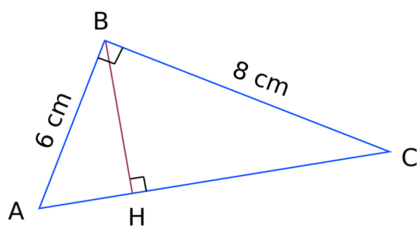
a. Soit [RS] un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon 4,5 cm.
T est un point de ce cercle tel que RT = 6 cm.
Quelle est la nature du triangle RST ? En déduire la distance ST (arrondir le résultat au mm).

b. La médiane issue de S dans le triangle RST coupe [OT] en G et [RT] en I.
Que représente le point G pour le triangle RST ? En déduire la distance TG.

c. La parallèle à (RS) passant par G coupe [RT] en J et [TS] en K. Calculer TJ. Calculer JK.

d. La perpendiculaire à (RS) passant par I coupe la droite (ST) en H. Démontrer que : (RH) $\perp$ (IS).

16 *Un triangle rectangle dans tous ses états...*



a. Calculer l'aire du triangle ABC.

b. Calculer AC.

c. Calculer BH en utilisant les résultats précédents.

d. Calculer alors AH et HC.

e. Calculer la mesure au degré près de l'angle $\widehat{CBH}$.

f. Préciser la position du point M centre du cercle circonscrit au triangle ABC puis calculer son rayon.

g. On note G le point de [BM] tel que BG = $\frac{10}{3}$ cm. Que représente G pour ABC ? Et (AG) ?

17 *Pythagore, Thalès, cosinus*

ABC est un triangle tel que BC = 6 cm ; AC = 7,5 cm et AB = 4,5 cm.
E est le point de [AB] tel que AE = 1,2 cm. La perpendiculaire à (AB) en E coupe (AC) en F.

a. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

b. Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. Démontrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles puis calculer EF et l'aire du triangle ABF.

d. Calculer BF (arrondir au dixième).

18 *Pythagore, Thalès, cosinus, milieux, droites remarquables*

a. Tracer un demi-cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de diamètre [AB] tel que AB = 6 cm.
Placer M sur $(\mathscr{C})$ tel que BM = 3,6 cm.
Justifier la nature du triangle ABM puis calculer AM.

b. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{ABM}$.

c. Placer P sur [AB] tel que PA = 4,5 cm. La parallèle à (BM) passant par P coupe [AM] en R.
Calculer AR et RP.

d. On note I le milieu de [AM]. Que peut-on dire des droites (OI) et (PR) ? Justifier.

e. (OM) et (BI) se coupent en G. Calculer MG.

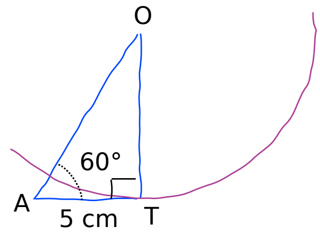
19 *Cercle circonscrit à un triangle rectangle, cosinus, tangente.*

On considère un triangle OAT tel que AT = 5 cm et $\widehat{OAT}$ = 60°.
(AT) est la tangente au cercle de centre O passant par T.

a. Calculer AO.

b. Calculer OT (arrondir au mm).

c. On note I le milieu de [OA]. Calculer IT.



20 *Triangles et cercle, Pythagore, tangente à un cercle, centre de gravité, droites des milieux*

a. Construire un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 3,2 cm. Noter [AB] un diamètre.
Tracer un triangle OAT avec AT = 6 cm et OT = 6,8 cm.

b. Que représente (AT) pour le cercle $(\mathscr{C})$? Justifier.

c. On note E le point d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ avec [OT] puis F le symétrique de A par rapport à E.
Démontrer que (OE) et (FB) sont parallèles.

d. Quelle est la nature du triangle AEB ? Pourquoi ?

e. On note G le point d'intersection de (OF) et (EB). Prouver que (AG) coupe [BF] en son milieu.

21 *Tétraèdre (volume, patron), Pythagore, cosinus, milieux, utilisation du volume d'une pyramide*

La pyramide étudiée dans cet exercice est un tétraèdre. On peut considérer que le triangle ABC est une base et que [AD] est alors la hauteur.

a. On donne AC = 4 cm, BC = 3,2 cm et AB = 2,4 cm.
Préciser, en justifiant, la nature du triangle ABC puis calculer son aire.

b. Calculer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

c. On donne AD = 2 cm.

- Calculer le volume du tétraèdre DABC.
- Dessiner un patron de ce tétraèdre en vraie grandeur.
  Comment semble être la face BCD ?

d. Calculer DC^2 ainsi que DB^2.
Justifier alors la nature du triangle BCD.

e. On note M le milieu du segment [AB] et N celui du segment [AC].
Calculer MN puis le volume du tétraèdre DAMN.

f. Calculer le volume de la pyramide DMNCB en remarquant qu'elle s'obtient en ôtant au tétraèdre DABC le tétraèdre DAMN.

g. Retrouver alors l'aire de la base de la pyramide DMNBC en utilisant la formule de son volume.

22 *Pyramides (volume, patron), Pythagore, cosinus*

La pyramide ci-contre a pour base un rectangle ABCD.
On donne AB = 1 cm et BC = 10 cm.
Les faces SAB et SDC sont deux triangles rectangles superposables.
Le triangle SAD est isocèle en S avec SA = 7 cm.

a. Calculer la mesure arrondie au mm de la hauteur SH de cette pyramide (on remarquera que H est le milieu de [AD]).

b. Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{SAH}$.

c. En sachant que SH ≈ 4,9 cm, calculer la valeur approchée du volume de cette pyramide au cm^3 près.

d. Réaliser un patron à l'échelle $\frac{1}{2}$ de cette pyramide.

e. Calculer SB (ou SC) puis préciser la nature du triangle SBC.

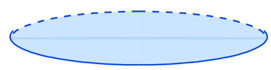
23 *Cône de révolution, volume, Pythagore, cosinus, Thalès*

On considère un cône de révolution de sommet S, de base le disque de rayon OA = 12 cm et de hauteur OS = 15 cm.

a. Donner la valeur exacte de son volume en cm^3 en fonction de π.
Donner la valeur approchée de ce volume au cl près.

b. Calculer AS (arrondir au mm).

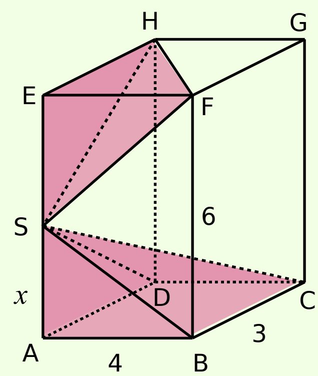
c. Calculer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$.



d. Calculer RT sachant que OR = 5 cm.

24 *Pyramides, volumes en fonction de x, équation, patron, Pythagore (d'après Brevet des Collèges, Afrique 2001)*

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).
On donne AB = 4 cm, BC = 3 cm et AE = 6 cm.
Un point quelconque S de l'arête [AE] permet de définir :
- une pyramide SABCD de hauteur [SA] et de base le rectangle ABCD ;
- une pyramide SEFH de hauteur [SE] et de base le triangle rectangle EFH.



Partie A :

Dans cette partie on pose SA = x cm ($0 \le x \le 6$).

a. Exprimer en fonction de x le volume V_1 de la pyramide SABCD en cm^3.

b. Exprimer en fonction de x la longueur SE.

c. Démontrer que le volume V_2 en cm^3 de la pyramide SEFH est $12 – 2x$.

d. Déterminer la valeur de x pour laquelle $V_1 = V_2$ puis la valeur commune de ces volumes.

Partie B :

Dans cette partie x = 6 cm, donc le point S est confondu avec le point E. On considère à présent la pyramide EABCD de hauteur [EA] et de base le rectangle ABCD.

e. Calculer son volume V_3 en cm^3.

f. Réaliser un patron de cette pyramide.

g. Calculer la longueur de ses arêtes latérales au millimètre près.

25 *Cône, cylindres, volumes, équation (d'après Brevet des Collèges, Polynésie, septembre 2000)*

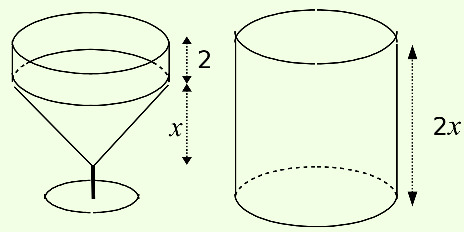
Dans tout ce problème, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm^2 et les volumes en cm^3.
On considère les deux verres représentés ci-après. Celui de droite est un cylindre de révolution dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure $2x$ (où x est un nombre positif, $x \leq 4$). Celui de gauche est constitué d'un cône dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure x, surmonté d'un cylindre d'aire de base 30 et de hauteur 2.

a. Exprimer V_1, le volume du verre de droite, en fonction de x, puis V_2, celui du verre de gauche, lui aussi en fonction de x.

b. V_1 est-il proportionnel à x ? Et V_2 ? Justifier les réponses.

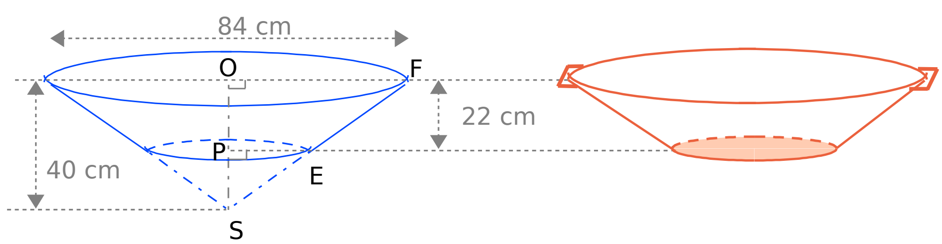
c. Déterminer la valeur de x pour laquelle $V_1 = V_2$ puis la valeur commune de ces volumes.

d. Déterminer une valeur arrondie au mm du rayon commun à ces deux verres.



26 *Cône de révolution, volume, Pythagore, cosinus, Thalès. Pourcentages, vitesse, équation (les deux parties de ce problème sont indépendantes).*

M. Gourmand utilise une bassine en cuivre pour cuire des fruits mélangés avec du sucre afin de faire de la confiture. On peut imaginer la bassine constituée ainsi : à un grand cône de sommet S et de base le disque de rayon [OF], on enlève le petit cône de sommet S et de base le disque de rayon [PE] (la partie restante formant la bassine s'appelle un tronc de cône).



Partie A :

a. Démontrer par le calcul que SF = 58 cm.

b. Préciser la position de (OF) par rapport à (PE) puis calculer PE.

c. Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{OSF}$.

d. Calculer, en cm^3, le volume V du grand cône, et le volume V' du petit cône (donner des résultats exacts en fonction de π).

e. En déduire une valeur approchée arrondie au cl du volume de la bassine.

Partie B :

a. En cuisant, les fruits perdent 35 % de leur masse. Quelle masse reste-t-il si on cuit 4 kg de fruits ?

b. Lorsqu'on rajoute le sucre, la masse augmente de 20 %. M.Gourmand a fait 4,2 kg de confiture. Quelle masse de fruits cuits avait-il avant l'ajout du sucre ?

c. Pour acheter le sucre, il est allé au supermarché distant de 28 km. Il a mis 35 min pour y aller. Calculer la vitesse moyenne de M.Gourmand en $km.h^{-1}$.

d. M. Gourmand a cherché la recette de la confiture sur Internet. Son fournisseur d'accès lui propose deux tarifs :

- Tarif 1 : une formule sans abonnement à 0,04 € la minute de connexion ;
- Tarif 2 : un abonnement mensuel de 20 € puis 0,02 € la minute de connexion.

On note x le nombre de minutes de connexion dans le mois.
Exprimer en fonction de x le coût mensuel pour Internet suivant les deux tarifs puis déterminer la durée de connexion dans le mois pour laquelle les deux tarifs sont équivalents.